

## RAPPORT UIT-R SA.2065

**Protection des liaisons de télémétrie des systèmes  
d'interférométrie spatiale à très grande base**

(2006)

## TABLE DES MATIÈRES

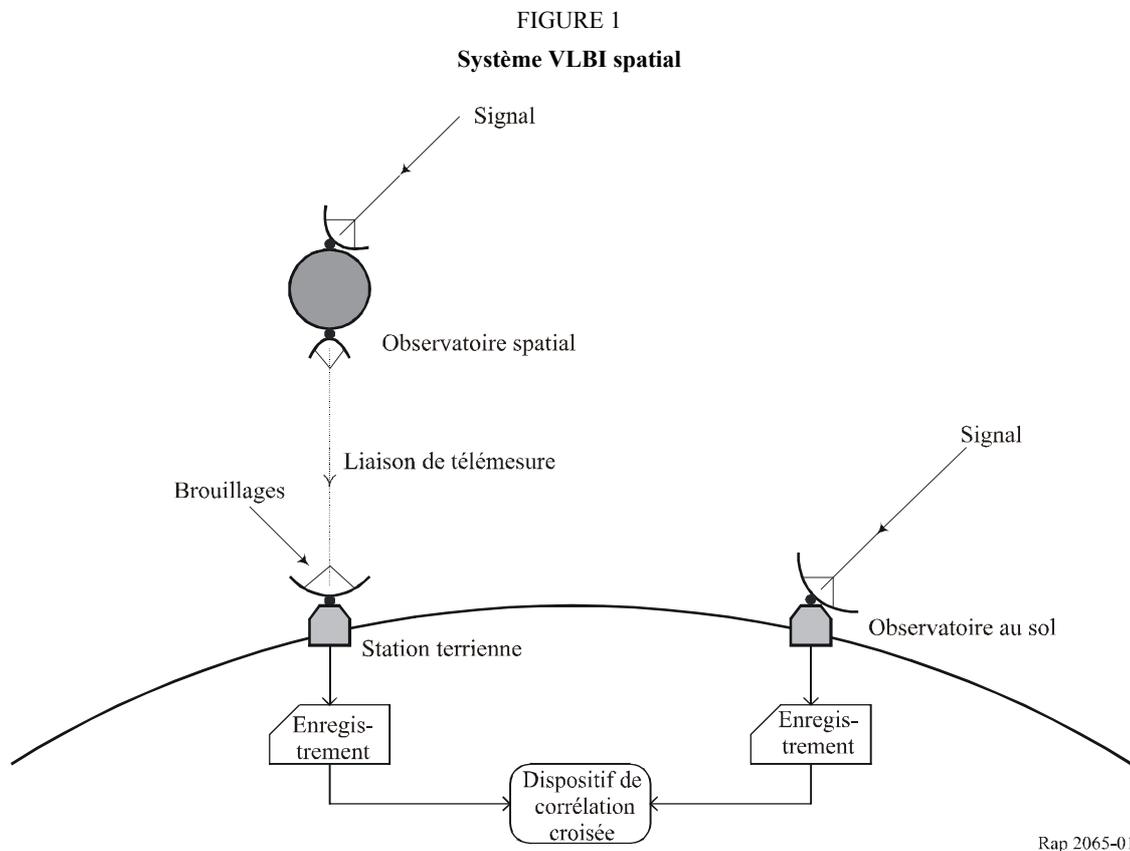
	<i>Page</i>
1 Introduction .....	2
2 Système VLBI spatial.....	2
2.1 Signal, bruit et brouillages sur la liaison de télémétrie du système VLBI spatial.....	3
2.1.1 Signal .....	3
2.1.2 Bruit et brouillages.....	3
3 Détection du signal transmis sur la liaison de télémétrie du système VLBI spatial .....	4
3.1 Récepteur de télémétrie .....	4
3.1.1 Filtre adapté.....	4
3.2 Taux d'erreurs sur les bits de télémétrie (TEB).....	5
4 Corrélation croisée dans le système VLBI spatial.....	6
4.1 Corrélation croisée des enregistrements numérisés.....	6
4.1.1 Valeur moyenne du produit de corrélation croisée .....	7
4.1.2 Evaluation de $P_{+1 c}$ .....	8
4.2 Rapport SNR de la corrélation croisée (XSNR).....	9
5 Calcul des critères de brouillage sur la liaison de télémétrie du système VLBI spatial.....	10
5.1 Dégradations du rapport XSNR dues au bruit et aux brouillages sur la liaison de télémétrie.....	10
5.2 Dégradation tolérable due aux brouillages .....	11
5.3 Calcul des critères de brouillage.....	12
Références bibliographiques .....	14

## 1 Introduction

L'interférométrie à très grande base (VLBI, *very long baseline interferometry*) permet d'obtenir une très haute résolution des radiosources observées. L'interférométrie VLBI a de nombreuses applications scientifiques et techniques, allant de l'observation des radiosources extragalactiques à la navigation et à la poursuite des engins spatiaux [Thomson *et al.*, 2001].

## 2 Système VLBI spatial

Un système VLBI spatial comprend un observatoire spatial et un observatoire au sol, qui ensemble constituent un interféromètre tel que représenté sur la Fig. 1.



Une liaison de télémétrie transmet vers la Terre le signal enregistré par l'observatoire spatial. Ce signal est dégradé par des sources de bruit thermique et d'autres bruits internes sur la liaison de télémétrie espace vers Terre ainsi que par des brouillages externes causés par d'autres stations radioélectriques à la station terrienne de réception. Le rapport (SNR) de la corrélation croisée constitue un facteur de qualité approprié pour toute la liaison de télémétrie du système VLBI spatial [Thomson *et al.*, 2001 et la Recommandation UIT-R SA.1344 – Bandes de fréquences et largeurs de bandes préférées pour la transmission de données d'interférométrie spatiale à très grande base (VLBI)]. Le présent rapport caractérise la dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée (XSNR) causée par les brouillages présents sur la liaison de télémétrie.

## 2.1 Signal, bruit et brouillages sur la liaison de télémétrie du système VLBI spatial

Dans l'analyse relative à la liaison de télémétrie, on suppose que le signal  $s(t)$  et le bruit  $n(t)$  plus un signal brouilleur  $I(t)$  sont présents, de sorte que le signal reçu vaut  $s(t)+n(t)+I(t)$ .

### 2.1.1 Signal

Le signal est une porteuse de puissance  $P$  et de fréquence  $f_c$ , modulée par des impulsions de données rectangulaires au moyen de la modulation par déplacement de phase quadrivalente avec codage différentiel (MDPQD). Cette modulation supprime la porteuse. Le signal est de la forme:

$$s(t) = \sqrt{P} \left[ \sum_k d_1[k]q(t - kT) \right] \cos(2\pi f_c t) + \sqrt{P} \left[ \sum_k d_2[k]q(t - kT) \right] \sin(2\pi f_c t) \quad (1)$$

où  $T$  est la période de symbole quaternaire, et

$$q(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (2)$$

est l'impulsion de données rectangulaire. La période de symbole quaternaire,  $T$ , est l'inverse du débit de symboles quaternaires ( $R = 1/T$ ), qui est égal à la moitié du débit de symboles binaires à l'entrée du modulateur MDPQD. Les séquences  $d_1[k]$  et  $d_2[k]$  ont des valeurs binaires:  $d_1[k] = \pm 1$  et  $d_2[k] = \pm 1$ , qui sont liées aux bits de données par un codage différentiel à quatre phases.

### 2.1.2 Bruit et brouillages

Comme toujours, on suppose que le bruit  $n(t)$  a une moyenne nulle, qu'il est gaussien et qu'il est blanc dans la bande passante du récepteur. Sa densité spectrale de puissance unilatérale dans la bande passante du récepteur vaut  $N_0$ .

Le signal brouilleur est caractérisé par une densité spectrale de puissance unilatérale  $S_i(f)$ . Cette densité spectrale de puissance est passe-bande et sa valeur de crête est supposée se trouver à une fréquence proche de  $f_c$  sinon, il ne s'agirait pas d'une menace de brouillage. Comme cette densité

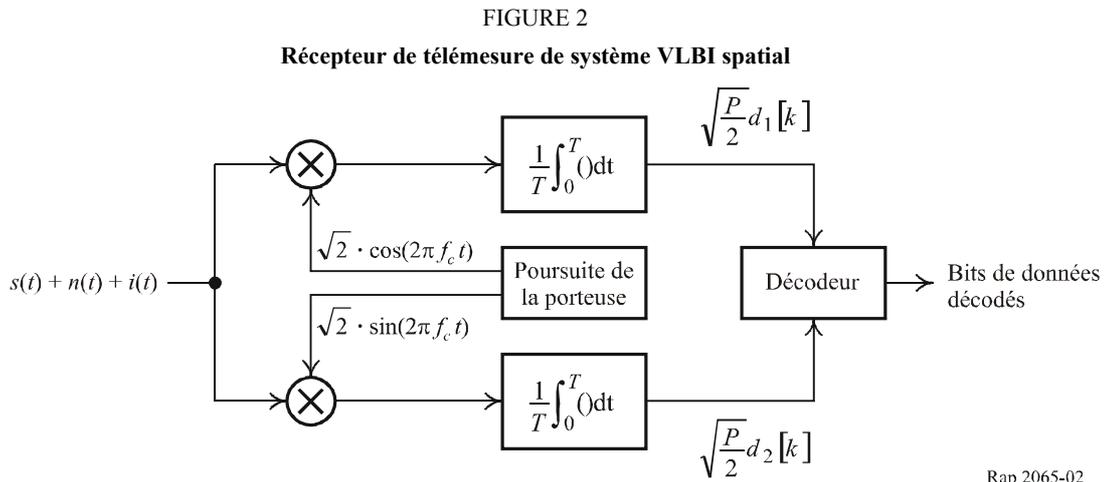
spectrale de puissance est unilatérale, l'intégrale  $\int_0^\infty S_i(f)df$  tient compte de la totalité de la puissance du signal brouilleur.

La densité spectrale de bruit,  $N_0$ , et la densité spectrale de puissance de brouillage,  $S_i(f)$ , sont mesurées au même point de la chaîne de réception que la puissance du signal,  $P$ . Normalement, le point de référence du récepteur correspond aux bornes d'entrée de l'amplificateur à faible bruit (LNA, *low noise amplifier*). La densité spectrale de bruit est fondée sur la température de bruit équivalente en ce point. La température de bruit équivalente tient compte de la température de bruit de l'antenne et de la totalité du bruit qui entre dans la chaîne de réception après l'antenne.

### 3 Détection du signal transmis sur la liaison de télémesure du système VLBI spatial

#### 3.1 Récepteur de télémesure

Le récepteur multiplie  $s(t)+n(t)+I(t)$  par un signal d'oscillateur local  $\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi)$  et, en parallèle, par  $\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi f_c t + \varphi)$  pour créer des canaux en phase et en quadrature comme indiqué sur la Fig. 2.



Rap 2065-02

Pour simplifier l'analyse, on suppose ici que la phase de poursuite de la porteuse  $\varphi = 0$ . Lors du traitement réel, la boucle de synchronisation de la porteuse MDPQ peut uniquement ramener  $\varphi$  à une valeur parmi quatre. Toutefois, le codage différentiel permet de garantir que cette ambiguïté de phase quadruple n'a pas d'incidence sur la récupération des données. Dans la présente analyse, l'hypothèse  $\varphi = 0$  est juste car l'effet des brouillages et du bruit sur la détection du signal de télémesure est le même pour les quatre valeurs possibles de  $\varphi$ .

Les signaux utiles qui apparaissent en bande de base dans les canaux de réception en phase et en quadrature sont les suivants (avec  $\varphi = 0$ ):

$$\sqrt{\frac{P}{2}} \left[ \sum_k d_1[k] q(t - kT) \right] \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{P}{2}} \left[ \sum_k d_2[k] q(t - kT) \right]$$

##### 3.1.1 Filtre adapté

Les canaux de réception en phase et en quadrature ont chacun un filtre adapté, modélisé simplement par une moyenne temporelle sur  $T$  s (voir la Fig. 2). Les signaux à temps discret disponibles à la sortie de ces filtres adaptés sont donc les suivants:

$$\sqrt{\frac{P}{2}} d_1[k] \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{P}{2}} d_2[k]$$

Le bruit thermique, qui fournit une contribution à la sortie de chaque canal de réception, est calculé comme suit. Avant le filtrage adapté, le bruit en bande de base dans chaque canal est de type gaussien avec une densité spectrale de bruit unilatérale  $N_0$  dans la largeur de bande de la bande de base. La puissance de l'unité du signal d'oscillateur local permet de garantir que la valeur  $N_0$  du bruit en bande de base est égal numériquement à la valeur  $N_0$  du bruit passe-bande de prédétection.

Le bruit additif est modélisé par une séquence de variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle, toutes étant indépendantes les unes des autres sur le plan statistique. Le bruit à la sortie du deuxième canal de réception présente les mêmes statistiques. Les bruits pour les deux canaux de réception sont indépendants statistiquement car les signaux d'oscillateur local sont orthogonaux. La variance des variables aléatoires gaussiennes est égale à la puissance de bruit dans la largeur de bande du filtre adapté prise aux bornes d'entrée de l'amplificateur à faible bruit. Cette variance du bruit thermique  $\sigma_n^2$ , qui est égale à la puissance totale du bruit thermique  $N$ , est donnée par:

$$N = \sigma_n^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \cdot \text{sinc}^2(fT) \cdot df = \frac{N_0}{2T} \quad (3)$$

Dans la largeur de bande du filtre adapté, la variance des brouillages  $\sigma_i^2$  est égale à la puissance de brouillage  $I$  prise aux bornes d'entrée de l'amplificateur à faible bruit. Elle peut être calculée comme suit:

$$I = \sigma_i^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(f + f_c) \cdot \text{sinc}^2(fT) \cdot df \quad (4)$$

La fonction sinc() apparaissant dans les équations (3) et (4) est définie par  $\text{sinc}(x) = \text{sinc}(\pi x)/(\pi x)$ .

### 3.2 Taux d'erreurs sur les bits de télémétrie (TEB)

En présence uniquement de bruit thermique, la probabilité  $P_e$  pour qu'un bit à codage différentiel (symbole) soit détecté incorrectement est la suivante:

$$P_e[n] = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{PT}{2N_0}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (5)$$

où  $\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy$  est la fonction d'erreur complémentaire. Nous avons utilisé:

$$\frac{PT}{2N_0} = \frac{E_b}{N_0} \quad (6)$$

étant donné que  $T$  est la période de symbole quaternaire.

La présence de brouillages fait passer la variance totale à la sortie de chaque filtre adapté de  $\sigma_n^2$  à  $(\sigma_n^2 + \sigma_i^2)$ , ce qui porte la densité spectrale de bruit équivalente de  $N_0$  à  $N_0 (\sigma_n^2 + \sigma_i^2) / \sigma_n^2$ ; le rapport équivalent énergie par bit sur densité spectrale de bruit est donc réduit d'un facteur  $\sigma_n^2 / (\sigma_n^2 + \sigma_i^2)$ . En présence de brouillages, la probabilité pour qu'un symbole soit erroné est alors la suivante:

$$P_e[n, i] = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b \cdot \sigma_n^2}{N_0 (\sigma_n^2 + \sigma_i^2)}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b \cdot N}{N_0 (N + I)}} \right) \quad (7)$$

étant donné que  $\sigma_i^2$  est la puissance totale de brouillage,  $I$ , et  $\sigma_n^2$  est la puissance totale de bruit,  $N$ .

Dans le processus de décodage différentiel, la probabilité de détecter un bit à codage différentiel (symbole) erroné,  $P_e$ , est liée comme suit à la probabilité pour qu'un bit de message soit erroné,  $P_e$ :

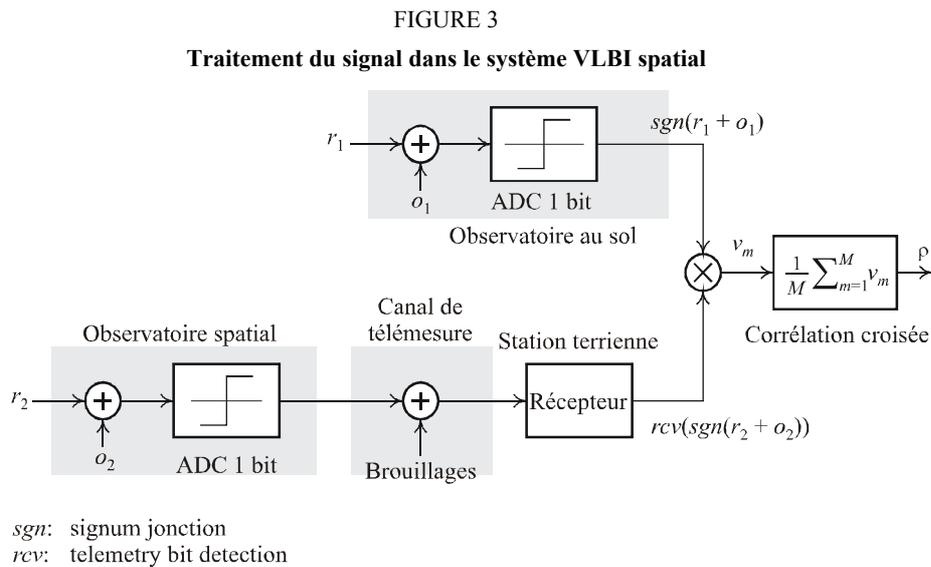
$$BER = P_e = 2P_e(1 - P_e) \quad (8)$$

Il est à noter que le taux d'erreurs sur les bits de télémétrie,  $BER$ , est égal à  $P_e$ . D'après la formule (8), on constate que pour la modulation MDPQD, lorsque  $P_e$  est petit,  $P_e \approx 2BER$ ; autrement dit, une

erreur sur un bit à codage différentiel se traduit généralement par deux erreurs sur les bits de message.

#### 4 Corrélation croisée dans le système VLBI spatial

La Fig. 3 ci-dessous illustre le traitement du signal dans le système VLBI spatial. L'observatoire spatial numérise le signal enregistré et le transmet à la station terrienne au moyen de la liaison de télémétrie espace vers Terre. L'observatoire au sol numérise aussi le signal qu'il enregistre et effectue une corrélation croisée entre ce signal et le signal reçu en provenance de l'observatoire spatial.



##### 4.1 Corrélation croisée des enregistrements numérisés

L'analyse qui suit est fondée sur une quantification sur un bit, qui est actuellement utilisée pour l'enregistrement du signal plus bruit aux deux observatoires d'un système VLBI spatial. Nous modélisons ici ces enregistrements quantifiés sur un bit comme ayant les valeurs  $\pm 1$  et nous définissons le produit de ces enregistrements provenant des deux observatoires comme suit:

$$v = \text{sgn}(r_1 + o_1) \cdot \text{rcv}(\text{sgn}(r_2 + o_2)) \quad (9)$$

Les signaux utiles de radiosource au niveau des deux observatoires VLBI sont désignés par  $r_1$  et  $r_2$ . L'ensemble du bruit au niveau des deux observatoires VLBI est désigné par  $o_1$  et  $o_2$ . Dans la formule ci-dessus,  $\text{sgn}()$  est la fonction signe, qui prend la valeur  $+1$  lorsque son argument est positif et  $-1$  lorsque son argument est négatif. L'opérateur  $\text{rcv}()$  représente la détection du bit de télémétrie.

Il arrive que la liaison de télémétrie entre l'observatoire spatial et la station terrienne inverse le signe du bit de télémétrie. Par conséquent,  $v$  peut être écrit comme suit:

$$v = \begin{cases} +\text{sgn}(r_1 + o_1) \cdot \text{sgn}(r_2 + o_2) & \text{si le bit de télémétrie est correct} \\ -\text{sgn}(r_1 + o_1) \cdot \text{sgn}(r_2 + o_2) & \text{si le bit de télémétrie est erroné} \end{cases} \quad (10)$$

Les deux variables aléatoires  $r_1$  et  $r_2$  ont une moyenne nulle et leur variance avant la quantification sur un bit est désignée par  $\sigma_{r_1}^2$  et  $\sigma_{r_2}^2$ . Dans cette analyse, on suppose qu'une fonction de

compensation du retard fait parfaitement correspondre, sur le plan temporel, les deux signaux de radiosource avant que les enregistrements provenant des deux observatoires VLBI soient multipliés. Autrement dit,  $r_2$  est identique à  $r_1$  à un facteur d'échelle près, c'est-à-dire  $r_2 = \alpha r_1$ . Dans ce cas,

$$E\{r_1 r_2\} = E\{\alpha r_1^2\} = \alpha \sigma_{r_1}^2 = \sigma_{r_1} \sigma_{r_2} \quad (11)$$

où  $E\{\}$  est l'opérateur d'espérance mathématique.

Les variables aléatoires  $o_1$  et  $o_2$  ont une moyenne nulle et sont de type gaussien; leur variance avant la quantification sur un bit est désignée par  $\sigma_{o_1}^2$  et  $\sigma_{o_2}^2$ . Normalement:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1} &\ll \sigma_{o_1} \\ \sigma_{r_2} &\ll \sigma_{o_2} \end{aligned} \quad (12)$$

La corrélation croisée, désignée par  $\rho$ , est définie comme suit:

$$\rho = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M v_m \quad (13)$$

où  $v_m$  ( $= v$ ) est une séquence de valeurs binaires indépendantes statistiquement issues de l'équation (9) et le nombre de valeurs binaires de la somme,  $M$ , est proportionnelle au temps d'intégration de la mesure. La valeur moyenne de  $\rho$  est:

$$\bar{\rho} = \bar{v} \quad (14)$$

et la valeur quadratique moyenne de  $\rho$  selon l'équation (15) est:

$$E\{\rho^2\} = \frac{1}{M} E\{v^2\} + \left(1 - \frac{1}{M}\right) \bar{v}^2 = \frac{1 - \bar{v}^2}{M} + \bar{v}^2 \quad (15)$$

étant donné que  $v^2 = 1$ . Compte tenu des équations (14) et (15), la variance de  $\rho$  peut s'écrire:

$$\sigma_{\rho}^2 = E\{\rho^2\} - \bar{\rho}^2 = \frac{1 - \bar{v}^2}{M} \quad (16)$$

Pour calculer la moyenne et la variance de la sortie du dispositif de corrélation croisée,  $\rho$ , il faut évaluer la valeur moyenne du produit de corrélation croisée,  $v$ .

#### 4.1.1 Valeur moyenne du produit de corrélation croisée

La moyenne  $\bar{v}$  est donnée par:

$$\bar{v} = (+1) \cdot P_{+1}(-1) \cdot P_{-1} = 2P_{+1} - 1 \quad (17)$$

où  $P_{+1}$  est la probabilité pour que  $v = +1$ . Cette probabilité est à son tour liée à la probabilité conditionnelle pour que  $v = +1$  sachant que le bit de télémessure est correct,  $P_{+1|c}$ , et à la probabilité conditionnelle pour que  $v = +1$  sachant que le bit de télémessure est erroné,  $P_{+1|e}$ , par:

$$P_{+1} = (1 - P_e)P_{+1|c} + P_e P_{+1|e} \quad (18)$$

où  $P_e$  est la probabilité pour que le bit de télémessure soit erroné (et  $1 - P_e$  est la probabilité pour qu'il soit correct).

La probabilité conditionnelle  $P_{+1|e}$  peut être écrite en fonction de  $P_{+1|c}$ . D'après l'équation (10), on remarque que  $P_{+1|e}$  est égal à la probabilité pour que  $\text{sgn}(r_1 + o_1) \cdot \text{sgn}(r_2 + o_2) = -1$ . Mais  $P_{-1|c}$  est égal

à cette même probabilité étant donné que le canal de télémessure présente une symétrie binaire:  $P_{+1|e} = P_{-1|c}$ . Ainsi,  $P_{-1|c} = 1 - P_{+1|c}$ . Par conséquent:

$$P_{+1|e} = 1 - P_{+1|c} \quad (19)$$

D'après l'équation (19) on obtient:

$$P_{+1} = (1 - P_e)P_{+1|c} + P_e(1 - P_{+1|c}) \quad (20)$$

En remplaçant l'équation (20) par l'équation (17), on obtient:

$$\bar{v} = (1 - 2P_e)(2P_{+1|c} - 1) \quad (21)$$

L'équation (21) indique que le produit de corrélation croisée est proportionnel à  $(1 - 2P_e)$ . Il s'ensuit que l'écart type de  $v$  est approximativement constant. Ainsi, avant d'avoir fini de déterminer la dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée, il est déjà possible de constater que cette dégradation sera proportionnelle à  $(1 - 2P_e)$ .

Pour finir de déterminer la valeur moyenne de  $v$ , il faut une formule donnant  $P_{+1|c}$ .

#### 4.1.2 Evaluation de $P_{+1|c}$

Pour évaluer  $P_{+1|c}$ , nous définissons deux probabilités conditionnelles utiles. Soit  $p_1$  la probabilité conditionnelle pour que  $r_1 + o_1$  soit positif, sachant  $r_1$ . De même, soit  $p_2$  la probabilité conditionnelle pour que  $r_2 + o_2$  soit positif, sachant  $r_2$ . Il est à noter que  $p_1$  est une fonction de  $r_1$  et que  $p_2$  est une fonction de  $r_2$ , exprimées comme suit:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{o_1}} \int_0^{\infty} e^{-(x-r_1)^2/(2\sigma_{o_1}^2)} dx$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{o_2}} \int_0^{\infty} e^{-(x-r_2)^2/(2\sigma_{o_2}^2)} dx \quad (22)$$

La probabilité inconditionnelle pour que  $r_1 + o_1$  et  $r_2 + o_2$  soient simultanément positifs est obtenue en prenant l'espérance mathématique ( $p_1 p_2$ ) sur les variables aléatoires  $r_1$  et  $r_2$ , autrement dit:  $E_{r_1, r_2} \{p_1 p_2\}$ .

Il faut aussi examiner la possibilité pour que  $r_1 + o_1$  et  $r_2 + o_2$  soient négatifs. L'expression  $(1 - p_1)$  représente la probabilité conditionnelle pour que  $r_1 + o_1$  soit négatif, sachant  $r_1$ . De même,  $(1 - p_2)$  représente la probabilité conditionnelle pour que  $r_2 + o_2$  soit négatif, sachant  $r_2$ . La probabilité inconditionnelle pour que  $r_1 + o_1$  et  $r_2 + o_2$  soient simultanément négatifs est obtenue en prenant l'espérance mathématique de  $(1 - p_1)(1 - p_2)$  sur les variables aléatoires  $r_1$  et  $r_2$ ; autrement dit:  $E_{r_1, r_2} \{(1 - p_1)(1 - p_2)\}$ . Lorsque le bit de télémessure est correct, il résulte de la formule (10) que  $v$  sera égal à  $+1$  si  $r_1 + o_1$  et  $r_2 + o_2$  sont tous deux positifs ou s'ils sont tous deux négatifs. Par conséquent, la probabilité conditionnelle pour que  $v = +1$ , sachant que le bit de télémessure est correct, est calculée comme étant la somme de  $E_{r_1, r_2} \{p_1 p_2\}$  et de  $E_{r_1, r_2} \{(1 - p_1)(1 - p_2)\}$ ; autrement dit,

$$P_{+1|c} = E_{r_1, r_2} \{p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)\} \quad (23)$$

Compte tenu des inégalités (12), il convient d'approximer  $p_1$  et  $p_2$  en prenant pour hypothèse que  $r_1 \ll \sigma_{o_1}$  et  $r_2 \ll \sigma_{o_2}$ . Si on développe chaque fonction de densité de probabilité de l'équation (22)

en série de Taylor et que l'on conserve uniquement les deux premiers termes de chaque série, on obtient les approximations suivantes:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_1}{\sigma_{o_1}} \\ p_1 &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_2}{\sigma_{o_2}} \end{aligned} \quad (24)$$

En remplaçant les équations (24) par l'équation (23), on obtient:

$$\begin{aligned} P_{+1|c} &\approx E_{r_1, r_2} \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_1}{\sigma_{o_1}} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_2}{\sigma_{o_2}} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_1}{\sigma_{o_1}} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_2}{\sigma_{o_2}} \right) \right\} \\ &\approx E_{r_1, r_2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{r_1}{\sigma_{o_1}} \frac{r_2}{\sigma_{o_2}} \right\} \\ &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{r_1}}{\sigma_{o_1}} \frac{\sigma_{r_2}}{\sigma_{o_2}} \end{aligned} \quad (25)$$

l'équation (11) ayant été utilisée dans la dernière étape.

#### 4.2 Rapport SNR de la corrélation croisée (XSNR)

Le rapport SNR de la corrélation croisée,  $XSNR$ , est défini comme suit:

$$XSNR = \frac{\bar{\rho}}{\sigma_{\rho}} = \bar{v} \sqrt{\frac{M}{1-\bar{v}^2}} = \bar{v} \sqrt{M} \quad (26)$$

étant donné que  $\bar{v} \ll 1$ . Il est à noter que le rapport  $XSNR$  n'est pas défini comme un rapport de puissances, mais simplement comme le rapport entre la moyenne et l'écart type de  $\rho$ . Ici, cette définition est raisonnable, étant donné que  $\rho$  correspond à une puissance, vu qu'il s'agit du produit de deux signaux de tension (ou d'intensité). En combinant les équations (21) et (25), on obtient alors l'expression approchée simple de  $\bar{v}$  suivante:

$$\bar{\rho} = \bar{v} \approx (1 - 2P_e) \cdot \left( \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{r_1}}{\sigma_{o_1}} \frac{\sigma_{r_2}}{\sigma_{o_2}} \right) \quad (27)$$

Par conséquent,  $XSNR$  est approximé comme suit:

$$\begin{aligned} XSNR &\approx (1 - 2P_e) \cdot \left( \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{r_1}}{\sigma_{o_1}} \frac{\sigma_{r_2}}{\sigma_{o_2}} \sqrt{M} \right) \\ &\approx (1 - 2P_e) \cdot \frac{2\sqrt{M}}{\pi} \cdot \sqrt{SNR_1 \cdot SNR_2} \end{aligned} \quad (28)$$

où  $SNR_1 = \sigma_{r_1}^2 / \sigma_{o_1}^2$  et  $SNR_2 = \sigma_{r_2}^2 / \sigma_{o_2}^2$  sont les rapports signal sur bruit au niveau des observatoires. Il est à noter que si le taux d'erreurs sur les bits de télémétrie est nul, le rapport SNR de la corrélation croisée devient:

$$XSNR_0 \approx \frac{2\sqrt{M}}{\pi} \cdot \sqrt{SNR_1 \cdot SNR_2} \quad (29)$$

qui peut être considéré comme la valeur nominale du rapport SNR de la corrélation croisée. Par conséquent, les erreurs sur les bits introduites par le canal de télémesure conduisent à l'expression suivante du rapport SNR de la corrélation croisée:

$$XSNR = (1 - 2P_e) \cdot XSNR_0 \quad (30)$$

Il est à noter qu'il s'agit d'une expression exacte du rapport  $XSNR$ , où  $XSNR_0$  représente le rapport SNR de la corrélation croisée sans erreur binaire. La formule (29) donne une approximation de  $XSNR_0$ . Dans le système VLBI spatial, le bruit thermique et les brouillages sur la liaison de télémesure ont une incidence sur le rapport  $XSNR$ . En particulier, nous avons montré ici que le rapport SNR de la corrélation croisée est proportionnel à  $(1 - 2P_e)$ ,  $P_e$  étant la probabilité d'erreurs sur les bits pour la liaison de télémesure.

Il est également à noter que, d'après l'équation (8),

$$1 - 2P_e = (1 - 2P_\epsilon)^2 \quad (31)$$

Par conséquent, le rapport SNR de la corrélation croisée sera proportionnel au carré de  $(1 - 2P_\epsilon)$ , à savoir:

$$XSNR = (1 - 2P_\epsilon)^2 \cdot XSNR_0 \quad (32)$$

## 5 Calcul des critères de brouillage sur la liaison de télémesure du système VLBI spatial

### 5.1 Dégradations du rapport XSNR dues au bruit et aux brouillages sur la liaison de télémesure

En l'absence de brouillages, la dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée due aux sources de bruit thermique et d'autres bruits internes sur la liaison de télémesure est définie par:

$$\begin{aligned} \text{Dégradation} &= -1 \log \frac{XSNR_n}{XSNR_0} = -10 \log (1 - 2P_\epsilon[n])^2 \\ &= -10 \log \left[ 1 - \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (33)$$

En présence de brouillages, la dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée due à la fois au bruit thermique et aux brouillages sur la liaison de télémesure est donnée par:

$$\begin{aligned} \text{Dégradation} &= -1 \log \frac{XSNR_{n,i}}{XSNR_0} = -10 \log (1 - 2P_\epsilon[n,i])^2 \\ &= -10 \log \left[ 1 - \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{N}{N+I}} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (34)$$

où  $N$  représente la puissance totale de bruit et  $I$  représente la puissance totale de brouillage. En combinant les formules ci-dessus, nous obtenons alors la dégradation additionnelle suivante due aux brouillages par rapport au cas du bruit thermique seul:

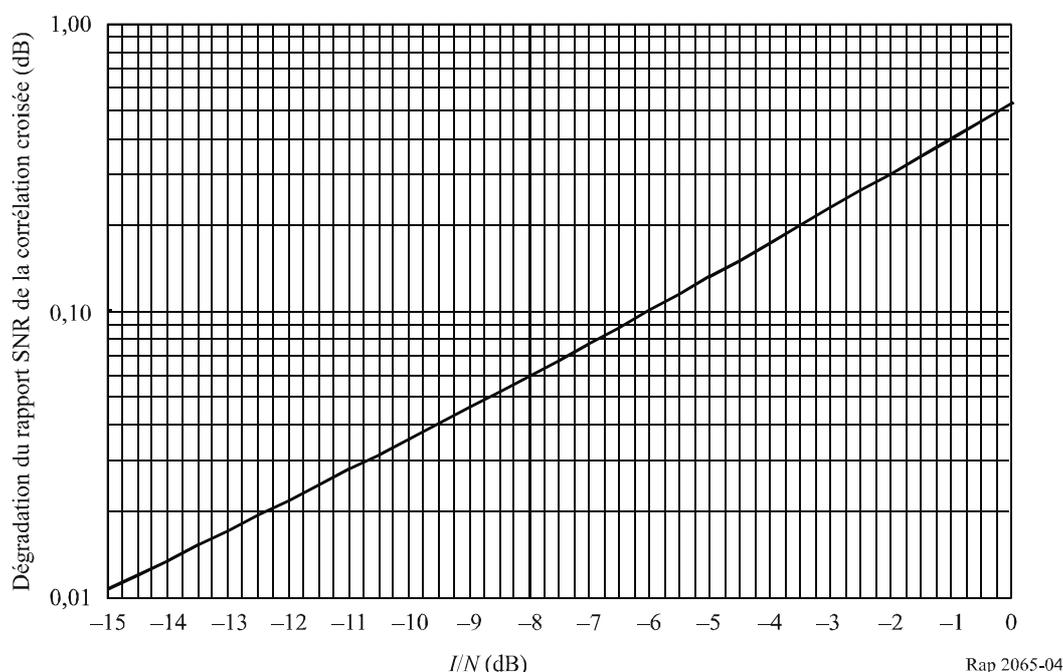
$$\text{Dégradation} = -10 \log \frac{XSNR_{n,i}}{XSNR_n} = -10 \log \left[ \frac{1 - \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{N}{N+I}} \right)}{1 - \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)} \right]^2 \quad (35)$$

Le rapport  $E_b/N_0$  vaut 5,2 dB pour la liaison de télémétrie de système VLBI spatial de base, ce qui correspond à un taux d'erreurs sur les bits de  $10^{-2}$  si on utilise la MDPQD avec détection cohérente. Avec ce TEB, l'équation (33) donne une dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée due au bruit thermique sur la liaison de télémétrie de 0,09 dB. Il est très difficile d'obtenir un rapport  $E_b/N_0$  plus élevé au niveau de l'engin spatial du système VLBI spatial en raison de l'exigence absolue d'un débit de données très élevé entre autres exigences propres à ce type d'engin spatial (une liaison avec phase stable, transportant la fréquence d'horloge de la station au sol jusqu'à l'engin spatial, une antenne d'observation de 15 m de diamètre pour la réception des signaux galactiques).

La dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée donnée par l'équation (35) pour un rapport  $E_b/N_0$  de 5,2 dB est représentée sur la Fig. 4 en fonction du rapport puissance de brouillage sur puissance de bruit du système,  $I/N$ . La puissance de brouillage comme la puissance de bruit thermique sont prises à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit du récepteur, pondérées par un filtre adapté à 1 GHz tel que défini par les équations (3) et (4) au § 3.1.1.

FIGURE 4

Dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée en fonction du rapport puissance de brouillage sur puissance de bruit du système ( $I/N$ ) pour  $E_b/N_0 = 5,2$  dB



Rap 2065-04

Le rapport des puissances totales,  $I/N$ , est généralement différent du rapport des densités spectrales de puissance,  $I_0/N_0$ , étant donné que le signal brouilleur et le filtre adapté présent dans le récepteur n'ont généralement pas la même largeur de bande. Lorsque les propriétés spectrales des signaux brouilleurs peuvent être caractérisées, il est possible de calculer le rapport  $I_0/N_0$  correspondant.

## 5.2 Dégradation tolérable due aux brouillages

L'incidence des brouillages sur les observations VLBI est examinée dans la publication [Thompson *et al.*, 2001], dans laquelle on considère le produit final d'une observation VLBI, à savoir l'image de la source du signal. Dans ce document, pour déterminer si des brouillages sont préjudiciables, on définit le rapport entre la valeur quadratique moyenne de la puissance de brouillage et la valeur quadratique moyenne de la puissance de bruit sur la carte radioélectrique (distribution de la brillance). On précise qu'une erreur de 1% dans la fonction de visibilité, qui est proportionnelle à la

fonction de corrélation croisée, se traduit par une erreur de 1% dans la valeur quadratique moyenne sur la distribution de la brillance par rapport à la valeur quadratique moyenne correspondante sur la distribution de brillance réelle. Par conséquent, une erreur de 1% dans la fonction de corrélation croisée est tolérable. Toutefois, la fonction de corrélation croisée est proportionnelle à la racine carrée du produit des rapports SNR pour les deux observatoires (voir l'équation (28) au § 4.2). Par conséquent, si on répartit l'erreur de manière égale entre les deux observatoires, on en déduit qu'une erreur de 1% pour le rapport  $SNR_1$  et une erreur de 1% pour le rapport  $SNR_2$  sont tolérables.

La Recommandation UIT-R RA.769 prend en considération les objectifs scientifiques de l'interférométrie VLBI examinés ci-dessus et établit un niveau tolérable de dégradation de la corrélation croisée. Dans cette Recommandation, dans laquelle on considère deux antennes VLBI au sol, il est précisé que «le niveau de brouillage acceptable est assujéti à la contrainte suivante: le niveau de puissance du signal brouilleur ne devrait pas dépasser 1% du niveau de bruit du récepteur afin d'éviter de graves erreurs dans la mesure de l'amplitude des signaux cosmiques». Lorsque des brouillages correspondant à 1% de la puissance de bruit du récepteur sont présents dans l'un des observatoires mais pas dans l'autre, le rapport SNR équivalent au niveau de cet observatoire est réduit d'un facteur  $1/1,01 = 0,99$ . Comme le rapport XSNR est proportionnel à la racine carrée du produit des rapports SNR pour les deux observatoires et que l'écart type est la racine carrée de la variance, le rapport XSNR est réduit d'un facteur  $\sqrt{0,99} = 0,995$ , à savoir de  $-10 \log(0,995) = 0,02$  dB.

Dans un système VLBI spatial, la Recommandation UIT-R RA.769 limite donc à 0,02 dB la dégradation de corrélation croisée due aux brouillages dans l'observatoire au sol. Pour atteindre le même objectif sur la liaison depuis l'observatoire spatial, il suffit de limiter à 0,02 dB la dégradation de corrélation croisée due aux brouillages sur la liaison de télémesure.

D'après la Fig. 4, nous déterminons que la dégradation du rapport XSNR est limitée à 0,02 dB lorsque le rapport puissance de brouillage sur puissance de bruit,  $I/N$ , au niveau du récepteur de télémesure ne dépasse pas  $-12,5$  dB.

Sur la liaison de télémesure espace vers Terre, deux sources dégradent le rapport XSNR (facteur de qualité): les dégradations internes au système (bruit thermique) et les brouillages externes. La dégradation de 0,09 dB due au bruit thermique est équivalente à une dégradation de 2,06% du facteur de qualité de la liaison. La dégradation de 0,02 dB due aux brouillages est équivalente à une dégradation de 0,46% du même facteur de qualité. Par conséquent, en ce qui concerne la somme des deux dégradations, les dégradations internes au système (bruit thermique) contribuent à hauteur de 82% et les brouillages externes à hauteur de 18%. Ces pourcentages sont conformes aux pourcentages correspondant à d'autres services actifs.

### 5.3 Calcul des critères de brouillage

Dans la bande définie par le filtre adapté, la puissance de brouillage aux bornes d'entrée de l'amplificateur à faible bruit est calculée à l'aide de l'équation (4). Toutefois, sa valeur qui correspond à une dégradation du rapport SNR de la corrélation croisée de 0,02 dB peut être calculée comme suit:

$$I = \frac{I}{N} \cdot N_0 \cdot \frac{R}{2} \quad (36)$$

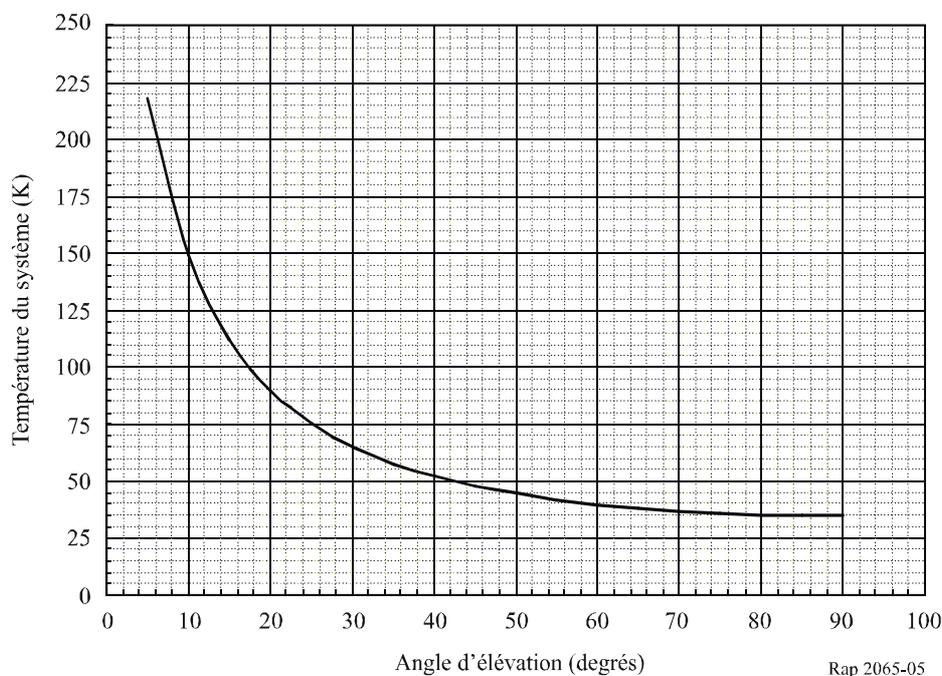
où  $I/N = -12,5$  dB,  $N_0$  est la densité spectrale de puissance unilatérale du bruit thermique et  $R$  est le débit de symboles quaternaires (voir l'équation (3)). Il est à noter que la densité spectrale de puissance unilatérale du bruit thermique dans le récepteur de télémesure est donnée par:

$$N_0 = kT_{\text{sys}} \quad (37)$$

où  $k = -228,6 \text{ dB(W/(Hz} \cdot \text{K))}$  est la constante de Boltzmann et  $T_{\text{sys}}$  est la température de bruit du système prise aux bornes d'entrée de l'amplificateur à faible bruit. Cette température de bruit dépend fortement de l'angle d'élévation de l'antenne comme indiqué sur la Fig. 5 pour une condition météorologique correspondant à une distribution cumulative de 90%.

FIGURE 5

$T_{\text{sys}}$  dans la bande 37-38 GHz avec une condition météorologique correspondant à 90%



Rap 2065-05

Pour une température de bruit de système équivalente  $T_{\text{sys}}$  de 150 K (condition météorologique correspondant à 90% pour un angle d'élévation de  $10^\circ$ ) et un débit de symboles quaternaires de 500 Msymboles/s, la puissance de brouillage est d'environ  $-135,5 \text{ dB(W)}$  compte tenu des équations (36) et (37), comme indiqué dans le Tableau 1 ci-dessous:

TABLEAU 1

## Calcul de la puissance de brouillage

Paramètre	Unité	Valeur	
$I/N$	dB	-12,5	Valeur nominale pour le système VLBI spatial
$N_0$	dB(W/Hz)	-206,84	$N_0 = kT_{\text{sys}}$ with $T_{\text{sys}} = 150 \text{ K}$
$R/2$	dB(symboles/s)	84	$R = 500 \text{ Msymboles/s}$
$I$	dBW	-135,34	

Il est important de noter que la puissance de brouillage, calculée au moyen de l'équation (36), est également prise aux bornes d'entrée de l'amplificateur à faible bruit. Il s'agit du même point de référence dans la chaîne de réception que pour la densité spectrale de bruit  $N_0$  mais on inclut uniquement la partie de la puissance totale de brouillage qui se trouve dans la bande définie par le filtre adapté pour la télémétrie. Il est également à noter que pour que la puissance de brouillage à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit définie par le filtre adapté à 1 GHz soit inférieure

à  $-135,5$  dB(W), il suffit de faire en sorte que la puissance de brouillage à l'entrée de l'amplificateur à faible bruit dans la bande 37-38 GHz soit inférieure à  $-135,5$  dB(W).

La boucle de poursuite de la porteuse du système VLBI spatial est également protégée convenablement lorsque  $I/N \leq -12,5$  dB. Considérons le cas extrême où la puissance de brouillage est concentrée dans un signal brouilleur en onde entretenue. La puissance de ce signal brouilleur  $I$  est définie par l'équation (36). La puissance équivalente de la porteuse  $P_c$ , qui est égale à la puissance totale du signal  $P$  déterminée à partir du critère  $E_b/N_0 \geq 5,2$  dB, s'écrit:

$$P_c = \frac{E_b}{N_0} \cdot N_0 \cdot 2R \quad (38)$$

étant donné que  $E_b = P/(2R)$ , où  $R$  est le même débit de symboles que dans l'équation (36). En utilisant les valeurs nominales, on obtient alors:

TABLEAU 2

**Calcul de la puissance de la porteuse**

Paramètre	Unité	Valeur	
$E_b/N_0$	dB	5,2	Valeur nominale pour le système VLBI spatial
$N_0$	dB(W/Hz)	-206,84	$N_0 = kT_{sys}$ avec $T_{sys} = 150$ K
$2R$	dB(symboles/s)	90	$R = 500$ Msymboles/s
$P_c$	dBW	-111,64	

Par conséquent, d'après les Tableaux 1 et 2, on a  $P_c/I = 23,7$  dB dans la boucle de poursuite de la porteuse. Ce rapport est suffisamment élevé pour que la dégradation de synchronisation de la porteuse et de détection du signal de télémétrie soit négligeable. Dans les cas normaux où le spectre de brouillage est étalé sur une largeur de bande de plusieurs MHz,  $P_c/I \gg 23,7$  dB et son effet sur la boucle de poursuite de la porteuse sera encore moindre.

**Références bibliographiques**

THOMPSON. A.R., MORAN J.M. et SWENSON G.W. [2001] *Interferometry and synthesis in radio astronomy*, 2nd Ed., J. Wiley & Sons.