

الاتحاد الدولي للاتصالات

ITU-R

قطاع الاتصالات الراديوية في الاتحاد الدولي للاتصالات

التوصية ITU-R P.1057-5
(2017/12)

توزيعات الاحتمالات المتعلقة بنمذجة
انتشار الموجات الراديوية

السلسلة P
انتشار الموجات الراديوية

تمهيد

يُضطلع قطاع الاتصالات الراديوية بدور يتمثل في تأمين الترشيد والإنصاف والفعالية والاقتصاد في استعمال طيف الترددات الراديوية في جميع خدمات الاتصالات الراديوية، بما فيها الخدمات الساتلية، وإجراء دراسات دون تحديد مدى الترددات، تكون أساساً لإعداد التوصيات واعتمادها. ويؤدي قطاع الاتصالات الراديوية وظائفه التنظيمية والسياساتية من خلال المؤتمرات العالمية والإقليمية للاتصالات الراديوية وجمعيات الاتصالات الراديوية بمساعدة لجان الدراسات.

سياسة قطاع الاتصالات الراديوية بشأن حقوق الملكية الفكرية (IPR)

يرد وصف للسياسة التي يتبعها قطاع الاتصالات الراديوية فيما يتعلق بحقوق الملكية الفكرية في سياسة البراءات المشتركة بين قطاع تقييس الاتصالات وقطاع الاتصالات الراديوية والمنظمة الدولية للتوحيد القياسي واللجنة الكهروتقنية الدولية (ITU-T/ITU-R/ISO/IEC) والمشار إليها في الملحق 1 بالقرار ITU-R 1. وترد الاستمارات التي ينبغي لحاملي البراءات استعمالها لتقديم بيان عن البراءات أو للتصريح عن منح رخص في الموقع الإلكتروني <http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en> حيث يمكن أيضاً الاطلاع على المبادئ التوجيهية الخاصة بتطبيق سياسة البراءات المشتركة وعلى قاعدة بيانات قطاع الاتصالات الراديوية التي تتضمن معلومات عن البراءات.

سلسلة توصيات قطاع الاتصالات الراديوية

(يمكن الاطلاع عليها أيضاً في الموقع الإلكتروني <http://www.itu.int/publ/R-REC/en>)

| العنوان | السلسلة |
|---|----------|
| البث الساتلي | BO |
| التسجيل من أجل الإنتاج والأرشفة والعرض؛ الأفلام التلفزيونية | BR |
| الخدمة الإذاعية (الصوتية) | BS |
| الخدمة الإذاعية (التلفزيونية) | BT |
| الخدمة الثابتة | F |
| الخدمة المتنقلة وخدمة الاستدلال الراديوي وخدمة الهواة والخدمات الساتلية ذات الصلة | M |
| انتشار الموجات الراديوية | P |
| علم الفلك الراديوي | RA |
| أنظمة الاستشعار عن بُعد | RS |
| الخدمة الثابتة الساتلية | S |
| التطبيقات الفضائية والأرصاد الجوية | SA |
| تقاسم الترددات والتنسيق بين أنظمة الخدمة الثابتة الساتلية والخدمة الثابتة | SF |
| إدارة الطيف | SM |
| التجميع الساتلي للأخبار | SNG |
| إرسالات الترددات المعيارية وإشارات التوقيت | TF |
| المفردات والمواضيع ذات الصلة | V |

ملاحظة: تمت الموافقة على النسخة الإنكليزية لهذه التوصية الصادرة عن قطاع الاتصالات الراديوية بموجب الإجراء الموضح في القرار ITU-R 1.

النشر الإلكتروني

جنيف، 2018

التوصية ITU-R P.1057-5

توزعات الاحتمالات المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

(1994-2001-2007-2013-2015-2017)

مجال التطبيق

تصف هذه التوصية مختلف توزيعات الاحتمالات ذات الصلة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية وأساليب التنبؤ به.

مصطلحات أساسية

توزعات الاحتمالات، طبيعي، غوسي، لوغاريتمي طبيعي، رايلي، ناكاغامي-رايس، غاما، آسي، بيرسون.

إن جمعية الاتصالات الراديوية للاتحاد الدولي للاتصالات،

إذ تضع في اعتبارها

أ) أن انتشار الموجات الراديوية مرتبط أساساً بوسط عشوائي، مما يجعل من الضروري تحليل ظواهر الانتشار باستعمال طرائق إحصائية؛

ب) أن من الممكن، في معظم الحالات، وصف تغيرات معلمات الانتشار في الزمان والمكان وصفاً مرضياً بواسطة توزيعات احتمالات إحصائية معروفة؛

ج) أن من المهم معرفة الخصائص الأساسية لتوزيعات الاحتمالات الأكثر استعمالاً في الدراسات الإحصائية للانتشار،

توصي

1 بأنه ينبغي استخدام المعلومات الإحصائية ذات الصلة بنمذجة الانتشار الواردة في الملحق 1 في تخطيط خدمات الاتصالات الراديوية والتنبؤ بمعلمات أداء الأنظمة؛

2 بأنه ينبغي استخدام إجراء خطوة بخطوة الوارد في الملحق 2 من أجل تقريب توزيع الاحتمالات التراكمي التكميلي بواسطة توزيع احتمالات تراكمي تكميلي لوغاريتمي طبيعي.

الملحق 1

توزعات الاحتمالات المتعلقة بنمذجة انتشار الموجات الراديوية

1 مقدمة

أظهرت التجربة أن المعلومات عن القيم المتوسطة للإشارات المستقبلية لا تكفي لتوصيف أداء أنظمة الاتصالات الراديوية على الوجه الصحيح. وينبغي كذلك أن تُؤخذ في الاعتبار التغيرات في الزمان والمكان والتردد.

ويؤدي السلوك الدينامي للإشارات المطلوبة والإشارات المسببة للتداخل دوراً كبيراً في تحليل موثوقية الأنظمة وفي اختيار معلمات الأنظمة، مثل نمط التشكيل. ومن الضروري معرفة توزيع الاحتمالات ومعدل تقلبات الإشارات لتحديد معلمات من قبيل نمط التشكيل وقدرة الإرسال ونسبة الحماية من التداخلات وإجراءات التنوع وطريقة التشفير، إلخ.

ولوصف أداء أنظمة الاتصال، يكفي في كثير من الأحيان ملاحظة السلاسل الزمنية لتقلبات الإشارات وتوصيف هذه التقلبات كعملية عشوائية. غير أن استعمال نمذجة تقلبات الإشارات للتنبؤ بأداء الأنظمة الراديوية يتطلب معرفة آليات التفاعل البيئي للموجات الراديوية مع الغلاف الجوي المتعادل والأيونوسفير.

وتتغير تركيبة الغلاف الجوي وحالته المادية كثيراً حسب المكان والزمان. ولذلك تتطلب نمذجة التفاعل البيئي للموجات استعمال الطرائق الإحصائية بتوسع لتمييز مختلف المعلمات المادية التي تصف الغلاف الجوي وكذلك المعلمات الكهربائية التي تحدد سلوك الإشارات وعمليات التفاعل البيئي التي تربط هذه المعلمات فيما بينها.

وفيما يلي بعض المعلومات العامة عن أهم توزيعات الاحتمالات. وقد يوفر ذلك خلفية مشتركة للطرائق الإحصائية للتنبؤ بالانتشار المستعملة في توصيات لجان دراسات الاتصالات الراديوية.

2 توزيع الاحتمالات

غالباً ما توصف توزيعات الاحتمالات للعمليات العشوائية إما بدالة كثافة الاحتمالات (PDF) أو دالة توزيع تراكمي (CDF). وتكون دالة كثافة الاحتمالات لمتغير عشوائي X ، المشار إليها بالعلامة $p(x)$ ، هي احتمال أن يأخذ المتغير X قيمة x ودالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي X ، المسماة $F(x)$ هي احتمال أن يأخذ المتغير X قيمة أصغر من x . أي تكون العلاقة بين دالتي PDF و CDF كما يلي:

$$(1a) \quad p(x) = \frac{d}{dx} [F(x)]$$

أو

$$(1b) \quad F(x) = \int_c^x p(t) dt$$

حيث c هو الحد الأدنى للتكامل.

وفيما يلي أهم توزيعات الاحتمالات لتحليل انتشار الموجات الراديوية:

- توزيع احتمالات طبيعي أو غوسي؛
- توزيع احتمالات لوغاريتمي طبيعي؛
- توزيع احتمالات رايلي؛
- توزيع احتمالات مركب لوغاريتمي طبيعي ورايلي؛
- توزيع احتمالات ناكاغامي-رايس؛
- توزيع احتمالات غاما وتوزيع أسي؛
- توزيع احتمالات ناكاغامي m ؛
- توزيع احتمالات χ^2 بيرسون.

3 توزيع الاحتمالات الطبيعي

عادةً ما يحدث توزيع الاحتمالات الطبيعي (الغوسي) لمتغير انتشار عشوائي عندما يكون المتغير العشوائي هو مجموع عدد كبير من المتغيرات العشوائية الأخرى.

وتوزيع الاحتمالات الطبيعي (الغوسي) هو توزيع احتمالات مستمر في الفاصل الزمني من $x = -\infty$ إلى $+\infty$. ودالة كثافة الاحتمالات (PDF)، $p(x)$ ، للتوزيع الطبيعي هي:

$$(2) \quad p(x) = k e^{-T(x)}$$

حيث $T(x)$ هي دالة متعددة الحدود من الدرجة الثانية غير سالبة بشكل $\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$ ، وحيث m و σ هما المتوسط والانحراف المعياري، على التوالي، لتوزيع الاحتمالات الطبيعي، ويُختار k بحيث $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$. وحينذاك تصبح دالة $p(x)$ كما يلي:

$$(3) \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

ودالة التوزيع التراكمي (CDF)، $F(x)$ ، لتوزيع الاحتمالات الطبيعي هي:

$$(3a) \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

$$(3b) \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

$$(3c) \quad = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

حيث:

$$(3d) \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

ودالة التوزيع التراكمي التكميلي (CCDF)، $Q(x)$ ، لتوزيع الاحتمالات الطبيعي هي:

$$(4a) \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) dt$$

$$(4b) \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-m}{\sigma}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

$$(4c) \quad = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

حيث:

$$(4d) \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

علمًا بأن $F(x) + Q(x) = 1$ و $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$.

ودالة التوزيع التراكمي العكسية $x = F^{-1}(p)$ هي قيمة x بحيث $F(x) = p$ ؛ ودالة التوزيع التراكمي التكميلي العكسية $x = Q^{-1}(p)$ هي قيمة x بحيث $Q(x) = p$.

وتمثل الخطوط المتصلة في الشكل 1 الدالتين $p(x)$ و $F(x)$ مع $m = 0$ و $\sigma = 1$ ، ويبين الجدول 1 التقابل بين x و $1 - F(x)$ لقيم x و $1 - F(x)$ متنوعة في المثال.

الجدول 1

| $1 - F(x)$ | x | $1 - F(x)$ | x |
|------------|-------|-------------------------|-----|
| 10^{-1} | 1,282 | 0,5 | 0 |
| 10^{-2} | 2,326 | 0,1587 | 1 |
| 10^{-3} | 3,090 | 0,02275 | 2 |
| 10^{-4} | 3,719 | $1,350 \times 10^{-3}$ | 3 |
| 10^{-5} | 4,265 | $3,167 \times 10^{-5}$ | 4 |
| 10^{-6} | 4,753 | $2,867 \times 10^{-7}$ | 5 |
| 10^{-7} | 5,199 | $9,866 \times 10^{-10}$ | 6 |
| 10^{-8} | 5,612 | | |

وفي الحسابات العملية، يصلح التقريب البسيط التالي للدالة $Q(x) = 1 - F(x)$ لأي متغير x موجب بخطأ نسبي أقل من $(2,8 \times 10^{-3})$:

$$(5) \quad Q(x) = 1 - F(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}(0,661x + 0,339\sqrt{x^2 + 5,51})}$$

وتتضمن معظم حزم البرمجيات الرياضية الحديثة الدالات $F(x)$ و $Q(x)$ و $\text{erf}(x)$ و $\text{erfc}(x)$.

وفي الانتشار، تكون معظم الكميات الفيزيائية المأخوذة في الاعتبار (القدرة، فرق الجهد، وقت الخبو، إلخ.) كميات موجبة أساساً، ولا يمكن أن تمثل مباشرة بتوزيع احتمالات طبيعي. ويُستعمل توزيع الاحتمالات الطبيعي في حالتين مهمتين:

- لتمثيل تقلبات متغير عشوائي حول قيمته المتوسطة (حالات خبو وتحسن التألؤ)؛
 - لتمثيل تقلبات لوغاريتم متغير عشوائي. عندئذ يكون للمتغير العشوائي توزيع لوغاريتمي طبيعي (انظر الفقرة 4).
- وتتاح تجارياً مخططات يُقال عن إحدى إحداثياتها إنها طبيعية، حيث يمثل التوزيع الطبيعي بخط مستقيم. ويكثر استعمال هذه المخططات حتى لتمثيل التوزيعات غير الطبيعية.

4 توزيع الاحتمالات اللوغاريتمي الطبيعي

توزيع الاحتمالات اللوغاريتمي الطبيعي هو توزيع احتمالات موجب للمتغير العشوائي X يكون للوغاريتم الطبيعي توزيع احتمالات طبيعي. ودالة كثافة الاحتمالات، $p(x)$ ، ودالة التوزيع التراكمي، $F(x)$ ، هما:

$$(6) \quad p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$(7) \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2\right] dt = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

حيث m و σ هما المتوسط والانحراف المعياري للوغاريتم المتغير X (أي أنهما ليسا المتوسط والانحراف المعياري للمتغير X ذاته).

ويصادف توزيع اللوغاريتمي الطبيعي في كثير من الأحيان في توزيعات احتمالات الانتشار المرتبطة بقدرة أو شدة مجال. وبما أن القدرة أو شدة المجال يعبر عنها عموماً بالديسيبل، يشار في بعض الأحيان إلى التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي خطأً على أنه توزيع

طبيعي بدلاً من توزيع لوغاريتمي طبيعي. وفي حالة توزيعات الاحتمالات مقابل الزمن (مثلاً مدة الخبو بالثواني)، يُستعمل دائماً مصطلح لوغاريتمي طبيعي صراحةً لأن المتغير التابع الطبيعي هو الزمن وليس لوغاريتم الزمن.

وبما أن مقلوب المتغير الذي له توزيع احتمالات لوغاريتمي طبيعي يكون له توزيع احتمالات لوغاريتمي طبيعي أيضاً، فإن توزيع الاحتمالات هذا يُصادف في حالة توزيع احتمالات معدل التغير (ومثال ذلك معدل الخبو بوحدة dB/s أو معدل هطول الأمطار بوحدة mm/hr).

وبالمقارنة مع توزيع الاحتمالات الطبيعي، يصادف توزيع الاحتمالات الطبيعي اللوغاريتمي عندما تكون القيم العددية للمتغير العشوائي الذي يسترعي الاهتمام ناتجة عن متغيرات عشوائية أخرى متساوية الترجيح.

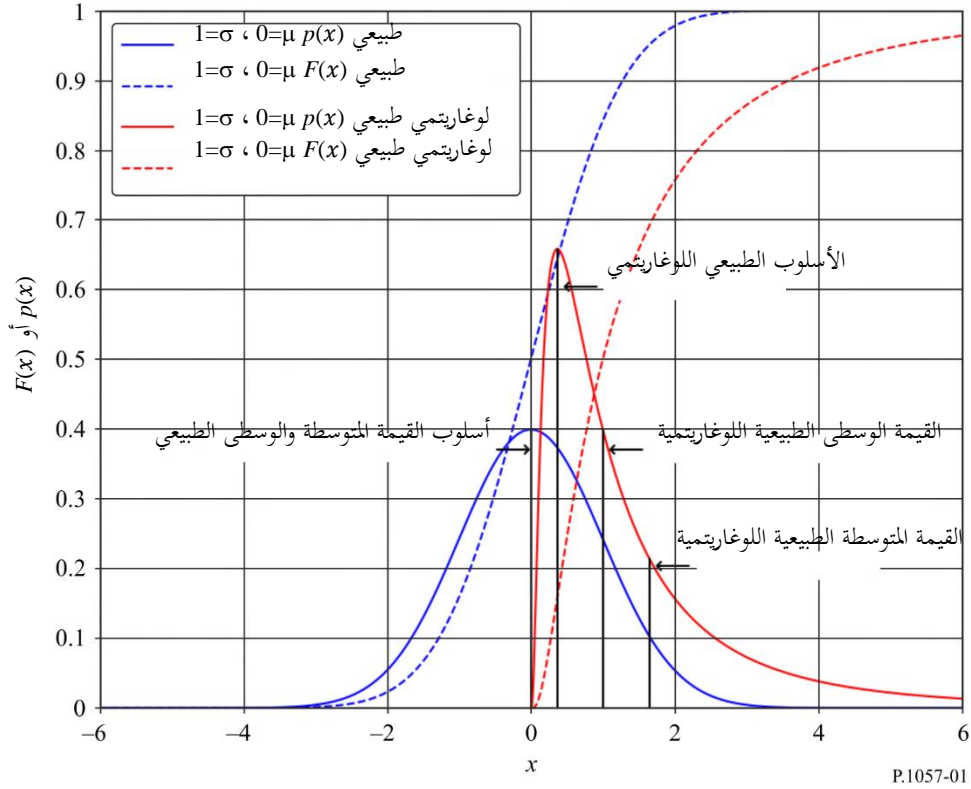
وخلافاً لتوزيع الاحتمالات الطبيعي، يكون توزيع الاحتمالات اللوغاريتمي الطبيعي لا تناظرياً إلى أقصى حد. وبوجه خاص فإن متوسط القيمة والقيمة المتوسطة والقيمة الأكثر احتمالاً (التي تُسمى عادة المنوال) ليست متماثلة (انظر الخطوط المتقطعة في الشكل 1).

وتكون القيم المميزة للمتغير العشوائي X كما يلي:

- القيمة الأكثر احتمالاً: $\exp(m - \sigma^2)$
- القيمة المتوسطة: $\exp(m)$
- متوسط القيمة: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$
- قيمة جذر متوسط التربيع: $\exp(m + \sigma^2)$
- الانحراف المعياري: $\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$

الشكل 1

توزع الاحتمالات الطبيعي والتوزع الطبيعي اللوغاريتمي



5 توزع احتمالات رايلي

توزع احتمالات رايلي هو توزع احتمالات مستمر لمتغير عشوائي ذي قيمة موجبة. فعلى سبيل المثال، في حال وجود توزع احتمالات طبيعي ثنائي الأبعاد لمتغيرين عشوائيين مستقلين y و z بمتوسط صفر ونفس الانحراف المعياري σ ، يكون المتغير العشوائي كما يلي:

$$(8) \quad x = \sqrt{y^2 + z^2}$$

ويكون لهذا المتغير العشوائي توزع احتمالات رايلي. ويمثل توزع احتمالات رايلي أيضاً توزع احتمالات طول المتجه الذي هو مجموع عدد كبير من المتجهات المكونة المتماثلة الاتساع والتي يكون لطور كل متجه مكون فيها توزع احتمالات منتظم.

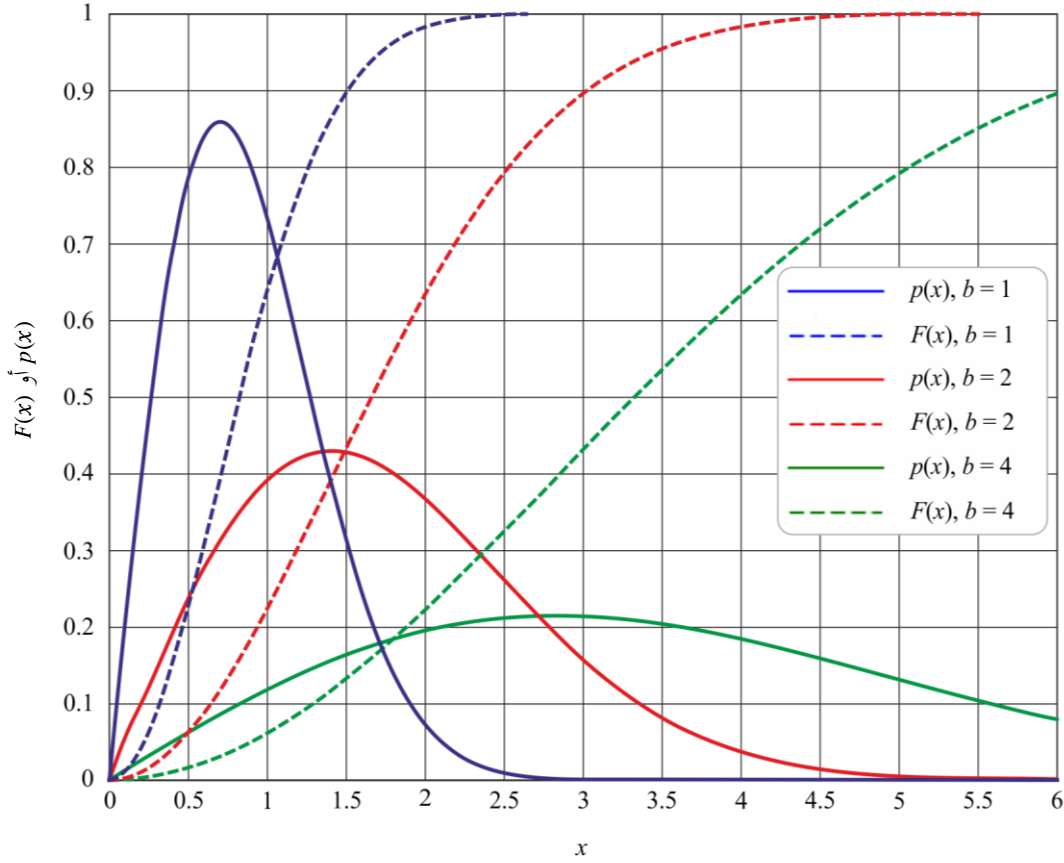
وتُعطى دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزع التراكمي لتوزع احتمالات رايلي بواسطة:

$$(9) \quad p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$(10) \quad F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

ويقدم الشكل 2 أمثلة على الدالتين $p(x)$ و $F(x)$ لثلاث قيم مختلفة لـ b .

الشكل 2
توزع احتمالات رايلي



P.1057-02

وبتعريف $b = \sigma\sqrt{2}$ ، تتمثل القيم المميزة للمتغير العشوائي X كما يلي:

- القيمة الأكثر احتمالاً: $\frac{b}{\sqrt{2}}$ ؛
- القيمة الوسطى: $b\sqrt{\ln 2} = 0,833b$ ؛
- متوسط القيمة: $\frac{b}{2} \sqrt{\pi} \approx 0,886b$ ؛
- قيمة جذر متوسط التربيع: b ؛
- الانحراف المعياري: $b\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} = 0,463b$.

وغالباً ما يكون توزع احتمالات رايلي قابلاً للتطبيق على قيم x المنخفضة. وفي هذه الحالة يمكن تقريب دالة التوزيع التراكمي، $F(x)$ ، على النحو التالي:

$$(11) \quad F(x) \approx \frac{x^2}{b^2}$$

ويمكن تفسير هذه الصيغة التقريبية على النحو التالي: احتمال أن تكون للمتغير العشوائي X قيمة أصغر من x تتناسب مع مربع x . فإذا كان المتغير الذي يسترعي الاهتمام عبارة عن فرق جهد، فإن مربعه يمثل قدرة الإشارة. بتعبير آخر، وبمقياس الديسيبل، فإن

القدرة تتناقص بقيمة 10 dB لكل رتبة لمقدار الاحتمال. وغالباً ما تُستعمل هذه الخاصية لتحديد ما إذا كان لسوية مستقبلية توزيع احتمالات رايلي مُقارب؛ علماً بأن توزيعات احتمالات أخرى يمكن أن يكون لها نفس السلوك. وفي انتشار الموجات الراديوية، يحدث توزيع احتمالات رايلي في تحليل الانتشار من عوامل انتشار متعددة مستقلة عشوائية الموقع لا تهيمن عليها أي مكون واحد من مكونات انتشار.

6 توزيع الاحتمالات المركب من لوغاريتمي طبيعي ورايلي

في بعض الحالات، يمكن اعتبار أن توزيع احتمالات متغير عشوائي تركيب توزعي احتمالات، أي توزيع احتمالات لوغاريتمي طبيعي للتغيرات على المدى الطويل (بمعنى بطيء) وتوزيع احتمالات رايلي للتغيرات على المدى القصير (بمعنى سريع). ويحدث توزيع الاحتمالات هذا أساساً في تحليلات انتشار الموجات الراديوية عندما يكون لخصائص واسطة الانتشار تغيرات لا يُستهان بها على المدى الطويل، كما يحدث في تحليل الانتشار التروبوسفيري مثلاً.

ويتم الحصول على توزيع احتمالات المتغير العشوائي باعتبار أن توزيع احتمالات رايلي متوسط قيمته (أو قيمة جذر متوسط التربيع) هو نفسه متغير عشوائي ذو توزيع احتمالات طبيعي لوغاريتمي.

دالة التوزيع التراكمي لتوزيع الاحتمالات المركب من لوغاريتمي طبيعي ورايلي هي:

$$(12a) \quad p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp(-2(\sigma u + m)) - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right) du$$

ودالة التوزيع التراكمي المتمم لتوزيع الاحتمالات المركب من لوغاريتمي طبيعي ورايلي هي:

$$(12b) \quad 1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp(-2(\sigma u + m)) - \frac{u^2}{2}\right) du$$

حيث يستعمل m و σ ، المعبر عنهما بوحدة نير، لتسمية المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع الاحتمالات الطبيعي المرتبط مع توزيع لوغاريتمي طبيعي.

وتعتمد القيمة k على تفسير σ و m

في هذه المعادلة، يُعبر عن الانحراف المعياري σ بالنيبرات. وإذا استُعملت σ' للإشارة إلى قيمته بالديسيبل، يكون لدينا:

$$(1) \quad \text{إذا كان } \sigma \text{ و } m \text{ يمثلان الانحراف المعياري ومتوسط اللوغاريتم الطبيعي للقيمة الأكثر احتمالاً لتوزيع احتمالات رايلي، فإن } 1/2 = k$$

$$(2) \quad \text{إذا كان } \sigma \text{ و } m \text{ يمثلان الانحراف المعياري ومتوسط اللوغاريتم الطبيعي للقيمة الوسطى لتوزيع احتمالات رايلي، فإن } \ln 2 = k$$

$$(3) \quad \text{إذا كان } \sigma \text{ و } m \text{ يمثلان الانحراف المعياري ومتوسط اللوغاريتم الطبيعي للقيمة المتوسطة لتوزيع احتمالات رايلي، فإن } \pi/4 = k$$

$$(4) \quad \text{إذا كان } \sigma \text{ و } m \text{ يمثلان الانحراف المعياري ومتوسط اللوغاريتم الطبيعي لقيمة جذر متوسط التربيع لتوزيع احتمالات رايلي، فإن } 1 = k$$

والقيمة المتوسطة (E) وقيمة جذر متوسط التربيع (RMS) والانحراف المعياري (SD) والقيمة الوسطى والقيمة الأكثر احتمالاً لتوزيع الاحتمالات المركب من لوغاريتمي طبيعي ورايلي هي:

القيمة المتوسطة، E:

$$(13a) \quad E = \int_0^{\infty} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right) du \right] dx$$

$$(13b) \quad = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

قيمة جذر متوسط التربيع، RMS :

$$(13c) \quad RMS = \sqrt{\int_0^{\infty} x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} kx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2}\right) du \right] dx}$$

$$(13d) \quad = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(m + \sigma^2)$$

الانحراف المعياري، SD :

$$(13e) \quad SD = \sqrt{\frac{1}{k} \exp(2(m + \sigma^2)) - \frac{\pi}{4k} \exp\left(2\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)}$$

$$(13f) \quad = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \sqrt{\exp(\sigma^2) - \frac{\pi}{4}}$$

القيمة الوسطى:

القيمة الوسطى هي قيمة x أي الحل من أجل:

$$(13g) \quad \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp(-2(\sigma u + m)) - \frac{u^2}{2}\right) du$$

أي

$$(13h) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-kx^2 \exp(-2(\sigma u + m)) - \frac{u^2}{2}\right) du$$

القيمة الأكثر احتمالاً:

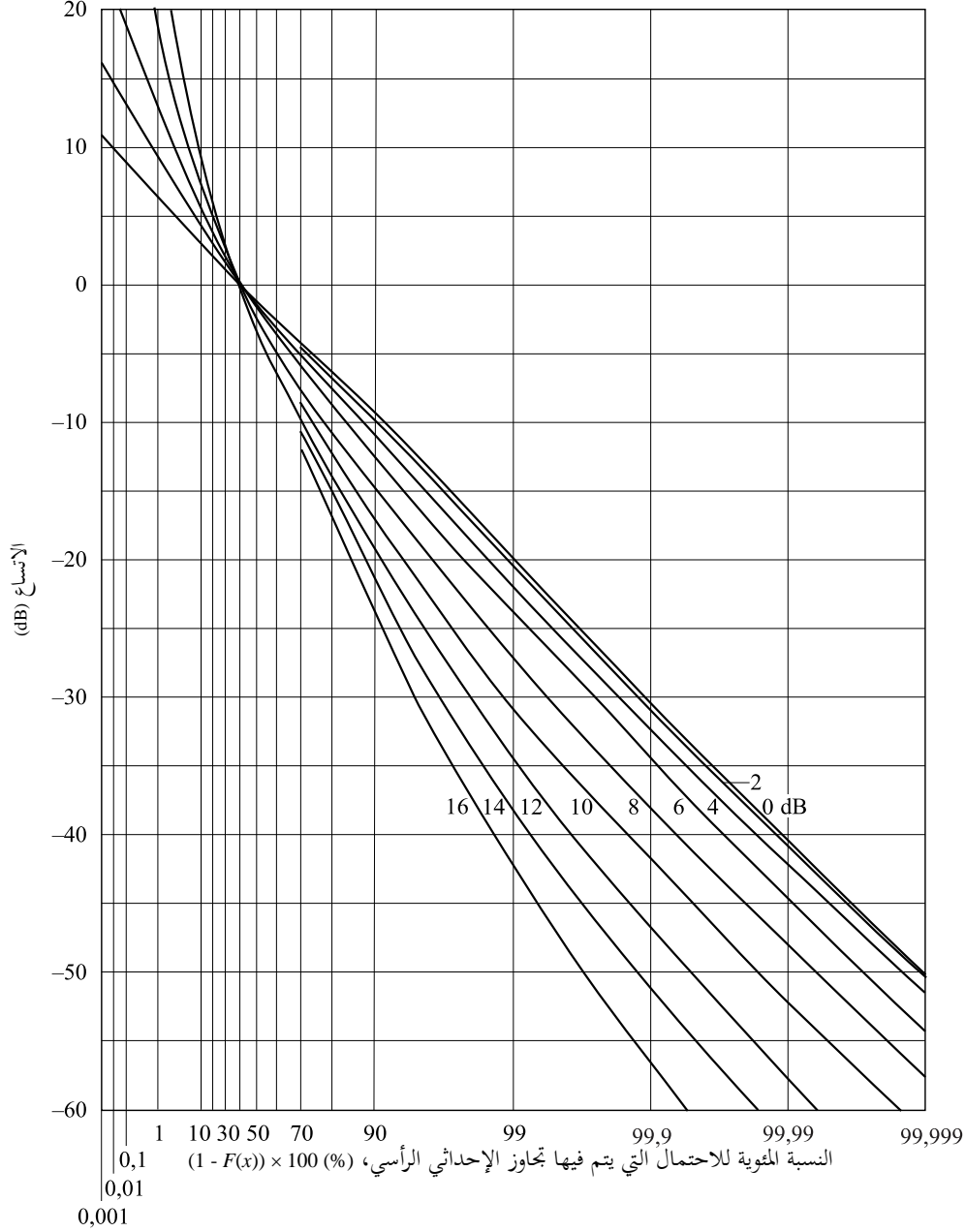
القيمة الأكثر احتمالاً (أي الأسلوب) هي القيمة x أي الحل من أجل:

$$(13i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - 2kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] \right\} \exp\left\{ -kx^2 \exp[-2(\sigma u + m)] - 2(\sigma u + m) - \frac{u^2}{2} \right\} du = 0$$

ويبين الشكل 3 تمثيلاً بيانياً لتوزيع الاحتمالات هذا لعدد من قيم الانحراف المعياري، حيث $0 = m$ و $1 = k$.

الشكل 3

التوزيع المركب من توزيع احتمالات طبيعي لوجاريتمي وتوزيع احتمالات رايلي
(مع اعتبار الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي اللوجاريتمي كمعلمة)



7 توزيع احتمالات ناكاغامي-رايس (ناكاغامي n)

إن توزيع احتمالات ناكاغامي-رايس (ناكاغامي n) الذي يختلف عن توزيع احتمالات ناكاغامي m، هو تعميم لتوزيع احتمالات رايلي. ويمكن النظر إلى هذا التوزيع على أنه توزيع احتمالات طول متجه وهو عبارة عن مجموع متجه ثابت ومتجه لطوله توزيع احتمالات رايلي.

بمعنى آخر بافتراض وجود توزيع احتمالات طبيعي ثنائي الأبعاد بمتغيرين مستقلين x و y ولهما نفس الانحراف المعياري σ ، فإن طول المتجه الذي يصل بين نقطة على توزيع الاحتمالات بنقطة ثابتة خلاف مركز توزيع الاحتمالات يكون له توزيع احتمالات ناكاغامي-رايس.

وإذا أشار a إلى طول متجه ثابت، و σ إلى الطول الأكثر احتمالاً لمتجه رايلي، فإن دالة كثافة الاحتمال تُعطى بواسطة:

$$(14) \quad p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right)$$

حيث I_0 هي دالة بيسيل المعدلة من النوع الأول ومن رتبة صفر.

ويتوقف توزيع الاحتمالات هذا على النسبة بين اتساع المتجه الثابت a واتساع جذر متوسط التربيع $\sigma\sqrt{2}$ للمتجه العشوائي. وهناك تطبيقان رئيسيان لانتشار الموجات الراديوية هما التاليان:

أ) القدرة في المتجه الثابت عبارة عن مقدار ثابت، لكن القدرة الإجمالية في المكونين الثابت والعشوائي هي توزيع احتمالات عشوائي.

إذا درسنا تأثير شعاع معكوس بواسطة سطح غير منتظم، والنظر في مكونات متعددة المسير إضافة إلى مكون ثابت، فإن متوسط القدرة يساوي $(a^2 + 2\sigma^2)$ ويعرف توزيع الاحتمالات عادة بمعلمة K .

$$(15) \quad K = 10 \log\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{dB}$$

وهذه المعلمة عبارة عن النسبة بين القدرة في المتجه الثابت والقدرة في المكون العشوائي.

ب) القدرة الإجمالية في المكونين الثابت والعشوائي ثابتة لكن كلا المكونين متغيران.

إذا درسنا الانتشار بمسيرات متعددة عبر الغلاف الجوي، يمكن اعتبار أن مجموع القدرة المنقولة بالمتجه الثابت ومتوسط القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي يكون ثابتاً، بما أن القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي تأتي من قدرة المتجه الثابت. وإذا أخذنا القدرة الإجمالية على أنها تساوي الواحد الصحيح، عندئذ:

$$(16) \quad a^2 + 2\sigma^2 = 1$$

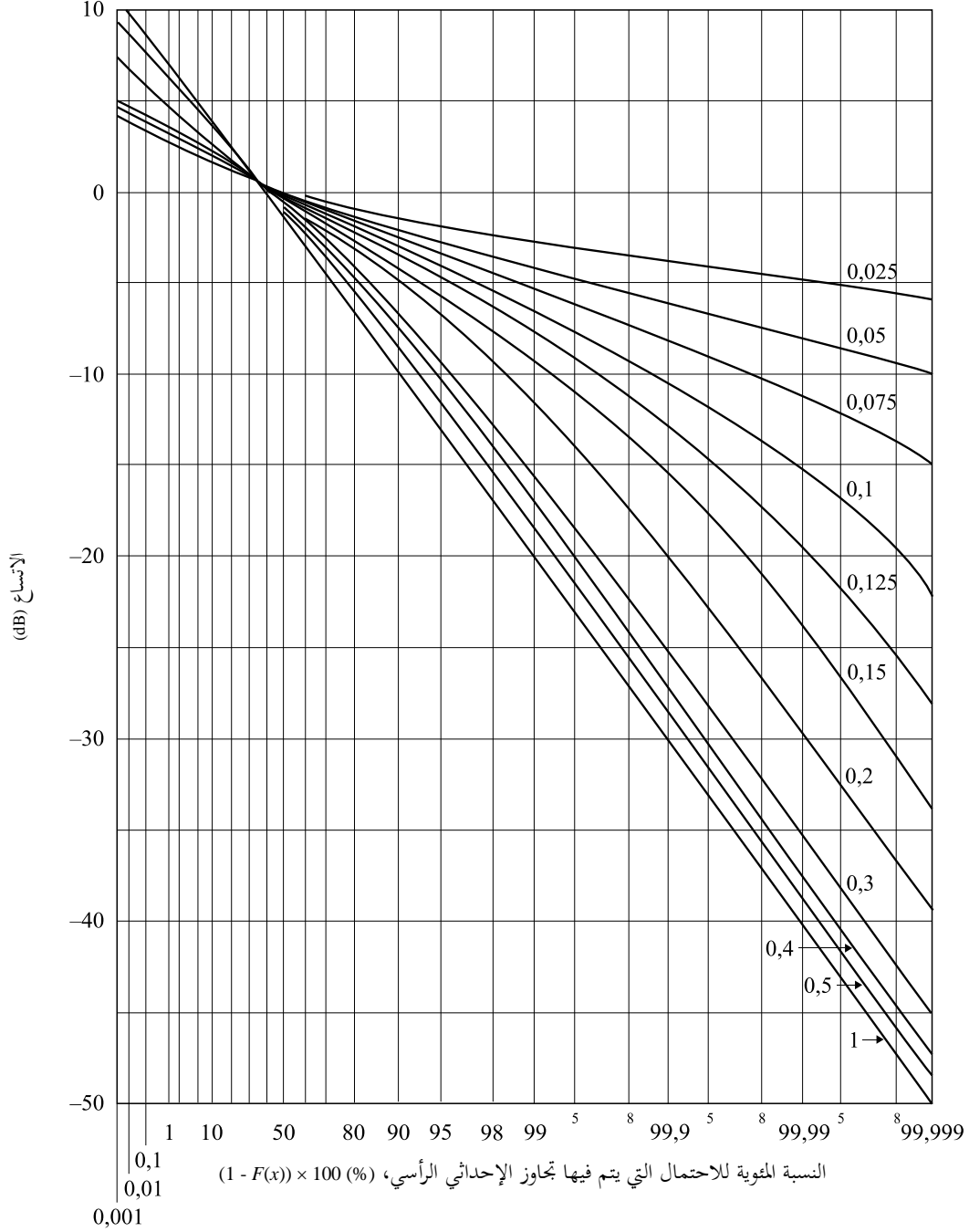
وعندئذ تكون أجزاء القدرة الإجمالية المنقولة بواسطة المتجه العشوائي تساوي $2\sigma^2$. وإذا كان X هو المتغير العشوائي للمتجه الناتج، فإن احتمال كون المتغير العشوائي X أكبر من x هو:

$$(17) \quad \text{Prob}(X > x) = 1 - F(x) = 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \int_{x/\sigma\sqrt{2}}^{\infty} v \exp(-v^2) I_0\left(\frac{2va}{\sigma\sqrt{2}}\right) dv$$

ويبين الشكل 4 توزيع الاحتمالات هذا لمختلف قيم أجزاء القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي.

الشكل 4

توزع احتمالات ناكاغامي-رايس لقدرة إجمالية ثابتة
(مع جزء القدرة المنقولة بواسطة المتجه العشوائي كمعلمة)



P.1057-04

وفي التطبيقات العملية، تُعرض الاتساعات باستعمال مقياس ديسيبل، وتُعرض الاحتمالات باستعمال مقياس بحيث يكون توزيع احتمالات رايلي خطأً مستقيماً. وبالنسبة إلى قيم جزء من القدرة الكلية في المتجه العشوائي التي تزيد عن 0,5 تقريباً، تدنو المنحنيات تقاربياً من توزيع احتمالات رايلي لأن المتجه الثابت له اتساع بنفس رتبة اتساع المتجه العشوائي ولا يمكن التمييز بينهما عملياً. وبالمقارنة بالنسبة إلى القيم الصغرى من هذا الجزء من القدرة الكلية في المتجه العشوائي، يتجه توزيع احتمالات الاتساع نحو توزيع احتمالات طبيعي.

وفي حين أن للتوسع توزيع احتمالات ناكاغامي-رايس فإن دالة كثافة الاحتمال للطور هي:

$$(18) \quad p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos \theta}{\sigma} e^{\frac{a^2 \cos^2 \theta}{2\sigma^2}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{a \cos \theta}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \right\} \cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

8 توزيع احتمالات غاما وتوزيع الاحتمالات الأسي

على عكس توزيعات الاحتمالات السابقة التي تشتق من توزيع الاحتمالات الطبيعي، فإن توزيع احتمالات غاما هو تعميم لتوزيع الاحتمالات الأسي. وهو توزيع احتمالات متغير موجب غير محدود. وتكون دالة كثافة الاحتمال هي:

$$(19) \quad p(x) = \frac{\alpha^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\alpha x}$$

وتمثل Γ دالة أولر من الدرجة الثانية.

وتعتمد دالة التوزيع التراكمي هذه على معلمتين α و v . لكن α ليست سوى معلمة قياس للمتغير x . والقيم المميزة للمتغير العشوائي X هي التالية:

- القيمة المتوسطة: $\frac{v}{\alpha}$
- قيمة جذر متوسط التربيع: $\frac{\sqrt{v(1+v)}}{\alpha}$
- الانحراف المعياري: $\frac{\sqrt{v}}{\alpha}$

ولا يمكن تقييم التكامل المعبر عن دالة التوزيع التراكمي بشكل صريح، ما عدا للقيم الصحيحة لـ v . وفيما يلي تمديدات السلاسل للحالتين خاصيتين:

تقريب تسلسلي للمتغير $x \gg 1$:

$$(20) \quad F(x) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^v \left[1 + \frac{\alpha x}{v+1} + \frac{(\alpha x)^2}{(v+1)(v+2)} + \dots \right]$$

وتقريب مقارب للمتغير $x \ll 1$:

$$(21) \quad 1 - F(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{v-1} \left[1 + \frac{v-1}{\alpha x} + \frac{(v-1)(v-2)}{(\alpha x)^2} + \dots \right]$$

بالنسبة إلى v تساوي الواحد الصحيح، تصبح الدالة $F(x)$ توزيع احتمالات أسي. وبالنسبة إلى القيم v الصحيحة، يكون للتمديد المقارب عدد محدود من الشروط ويعطي توزيع احتمالات غاما بشكل صريح.

وفي انتشار الموجات الراديوية، تكون القيم ذات الأهمية لـ v قيماً منخفضة جداً، بين 1×10^{-2} و 1×10^{-4} . وبالنسبة إلى v القريبة من صفر:

$$(22) \quad \frac{1}{\Gamma(v)} \approx \frac{v}{\Gamma(v+1)} \approx v$$

عند ذلك بالنسبة إلى القيم $\alpha x > 0,03$:

$$(23) \quad 1 - F(x) \approx v \int_{\alpha x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

وللحسابات العملية، يمكن العثور على تقريب للتكامل السابق، كالتالي:

$$(24) \quad 1 - F(x) \approx v \frac{e^{-\alpha x}}{0.68 + \alpha x + 0.28 \log \alpha x}$$

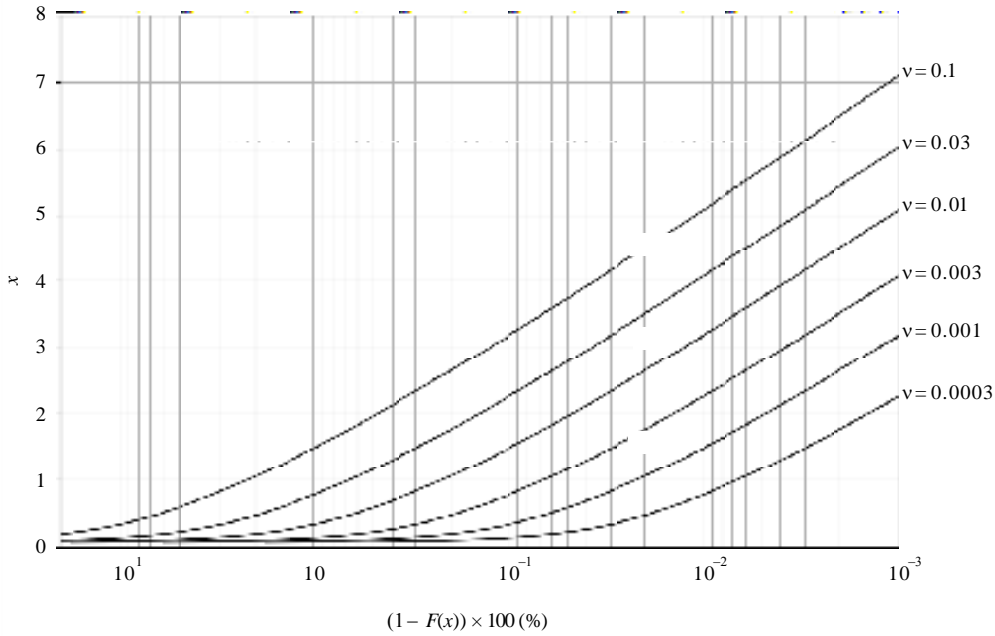
وهو ما يعد صالحاً في حالة $v < 0,1$ و $\alpha x > 0,03$.

ويبين الشكل 5 دالة التوزيع التراكمي لدالة غاما التكميلية لقيم v الصغيرة. وهناك احتمال قليل أن يكون المتغير X أكبر بكثير من الصفر. وذلك ما يفسر على الخصوص استعمال توزيع احتمالات غاما لتمثيل معدلات هطول المطر، إذ إن النسبة المئوية الإجمالية لوقت هطول المطر تتراوح على العموم بين 2 و 10%.

الشكل 5

توزيع احتمالات غاما

$$v \leq 0,1, \alpha = 1$$



P.1057-05

9 توزيع احتمالات m ناكاغامي

يطبق توزيع احتمالات m ناكاغامي على متغير موجب غير محدود. ودالة كثافة الاحتمال هي:

$$(25) \quad p(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m) \Omega^m} x^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega} x^2}$$

Ω معلمة سلمية تساوي متوسط قيمة x^2 ، أي

$$(26) \quad \overline{x^2} = \Omega$$

حيث m هي معلمة لتوزيع احتمالات m ناكاغامي وليست قيمة متوسطة كما في الأقسام السابقة من هذا الملحق.

ويرتبط توزيع الاحتمالات هذا بتوزيعات احتمالات أخرى كما يلي:

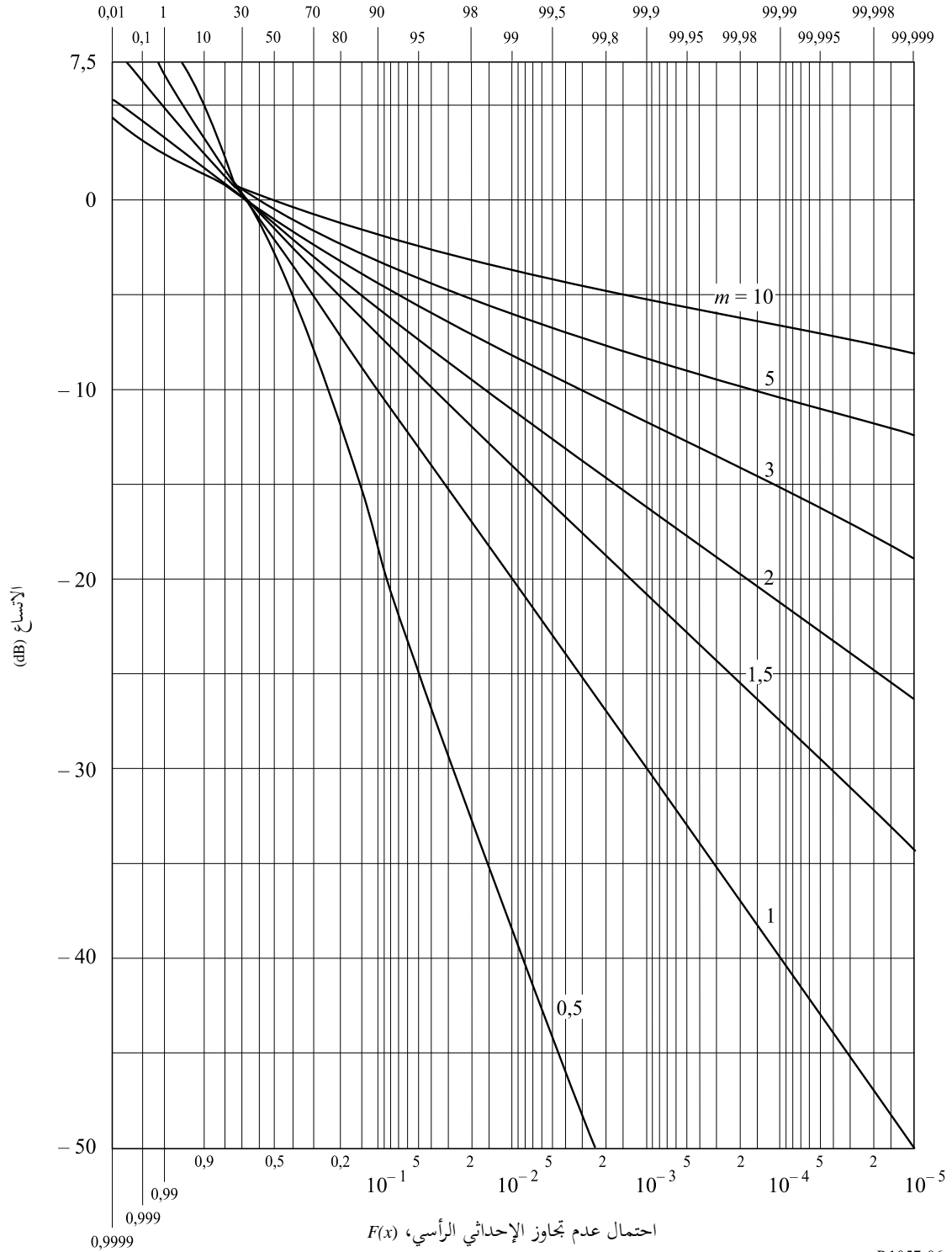
- إذا كان لمتغير عشوائي توزيع احتمالات m ناكاغامي، فإن مربع هذا المتغير العشوائي يكون له توزيع احتمالات غاما؛
- عندما تكون $m = 1$ ، يصبح توزيع احتمالات m ناكاغامي توزيع احتمالات رايلي؛
- عندما تكون $m = 1/2$ ، يصبح توزيع احتمالات m ناكاغامي توزيعاً طبيعياً أحادي الاتجاه.

وتوزيع احتمالات m ناكاغامي وتوزيع احتمالات ناكاغامي-رايس هما تعميمان مختلفان لتوزيع احتمالات رايلي. وبالنسبة إلى سويات الإشارة المنخفضة جداً، يؤول توزيع احتمالات m ناكاغامي نحو قيمة تتوقف على المعلمة m ، على عكس توزيع احتمالات ناكاغامي-رايس الذي يكون الميل الحدي فيه متساوياً عادةً (10 dB لكل رتبة لمقدار الاحتمال). ويبين الشكل 6 دالة توزيع احتمالات m ناكاغامي التراكمي لمختلف قيم المعلمة m .

الشكل 6

توزيع احتمالات m ناكاغامي ($\bar{x}^2 = 1$)

النسبة المئوية لاحتمال تجاوز الإحداثي الرأسي، $(1 - F(x)) \times 100$ (%)



10 توزيع احتمالات χ^2 بيرسون

فيما يلي دالة كثافة احتمالات χ^2 بيرسون:

$$(27) \quad p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1}$$

حيث χ^2 هو متغير موجب غير محدد، والمعلمة v ، وهي عدد صحيح موجب، يُدعى عدد درجات حرية توزيع الاحتمالات. ويمثل الرمز Γ دالة أولر من الدرجة الثانية. وحسب تعادلية v ، نحصل على:

$$(28) \quad \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \left(\frac{v}{2}-1\right)! \quad v \text{ زوجي:}$$

$$(29) \quad \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \left(\frac{v}{2}-1\right)\left(\frac{v}{2}-2\right)\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad v \text{ فردي:}$$

وفيما يلي دالة التوزيع التراكمي:

$$(30) \quad F(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{v}{2}-1} dt$$

ويكون متوسط القيمة والانحراف المعياري كما يلي:

$$(31) \quad m = v$$

$$(32) \quad \sigma = \sqrt{2v}$$

وهناك خاصية أساسية لتوزيع احتمالات χ^2 وهي أنه: إذا كان لعدد n من المتغيرات x_i $\{i=1, 2, \dots, n\}$ توزيعات احتمالات غوسية بمتوسط m_i وانحراف معياري σ_i ، فإن المتغير:

$$(33) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2$$

يكون له توزيع احتمالات χ^2 بعدد n من درجات الحرية. وعلى الخصوص، يكون لمربع متغير غوسي صغير توزيع احتمالات χ^2 بدرجة واحدة من الحرية.

وإذا كان لعدة متغيرات مستقلة توزيعات احتمالات χ^2 ، يكون لمجموعها كذلك توزيع χ^2 بعدد درجات حرية يساوي مجموع درجات الحرية لكل من المتغيرات.

ولا يختلف توزيع احتمالات χ^2 أساساً عن توزيع احتمالات غاما. ويرتبط توزيع الاحتمالات كما يلي:

$$(34) \quad \frac{\chi^2}{2} = \alpha x$$

$$(35) \quad \frac{v}{2} = m$$

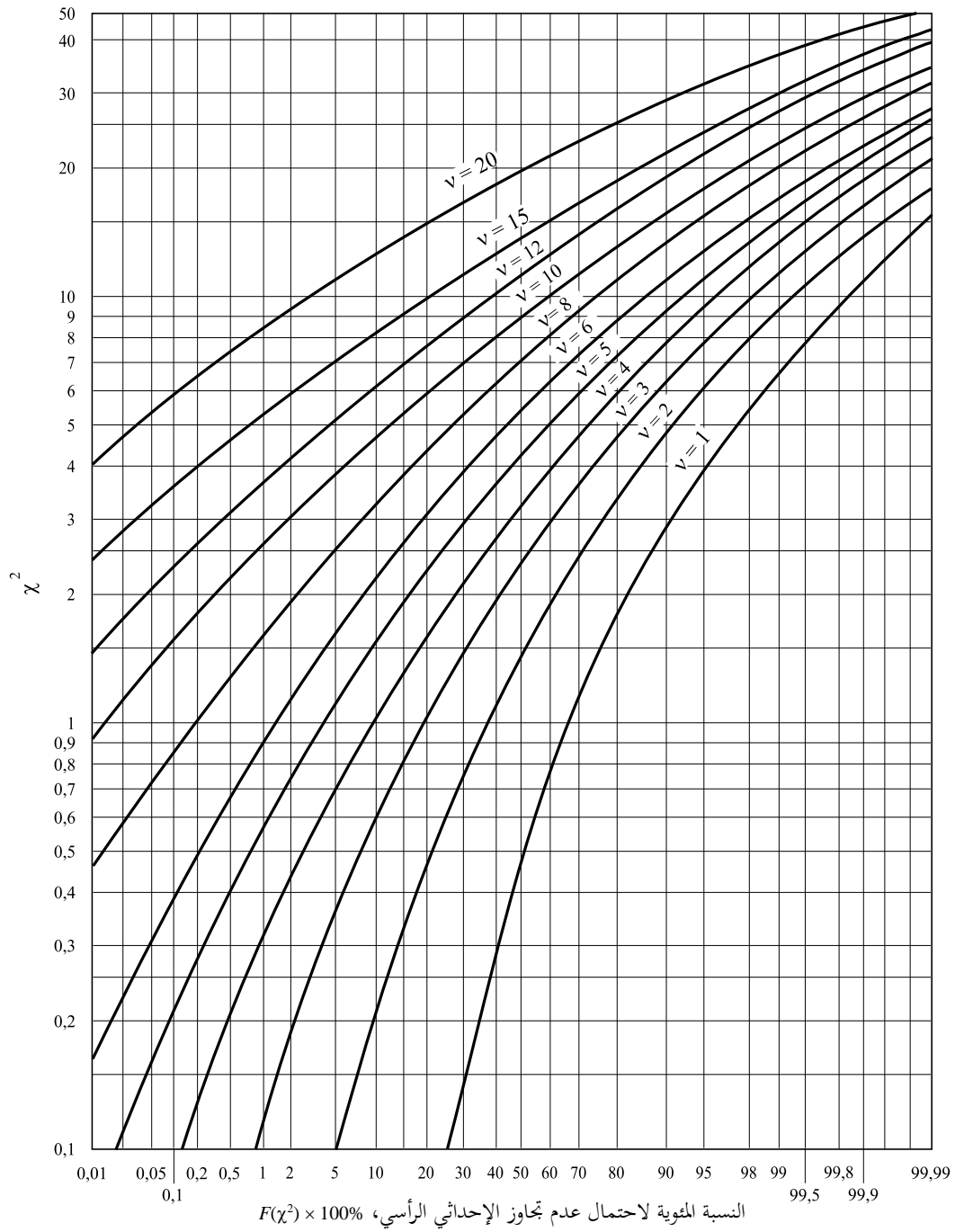
وبنفس الطريقة يرتبط توزيع احتمالات χ^2 بتوزيع احتمالات m ناكاغامي كما يلي:

$$(36) \quad \frac{\chi^2}{2} = \frac{m}{\Omega} x^2$$

$$(37) \quad \frac{v}{2} = m$$

ويُستعمل توزيع احتمالات χ^2 في اختبارات إحصائية لتحديد ما إذا كانت مجموعة القيم التجريبية لمقدار (من قبيل كثافة المطر، التوهين، إلخ.) يمكن أن تُنمذج بواسطة توزيع احتمالات معين. ويقدم الشكل 7 تمثيلاً بيانياً لتوزيع احتمالات χ^2 لعدة قيم v .

الشكل 7

توزيع احتمالات χ^2 

الملحق 2

إجراء الخطوة فخطوة من أجل تقريب التوزيع التراكمي التكميلي بواسطة توزيع تراكمي تكميلي طبيعي لوغاريتمي

1 معلومات أساسية

يعرف التوزيع التراكمي الطبيعي اللوغاريتمي كما يلي:

$$(38) \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

أو على نحو مكافئ:

$$(39) \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] dt$$

وبالمثل، يعرف التوزيع التراكمي التكميلي الطبيعي اللوغاريتمي كما يلي:

$$(40) \quad G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - m}{\sigma} \right)^2 \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

أو على نحو مكافئ:

$$(41) \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln x - m}{\sigma}}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] dt$$

$$= Q \left(\frac{\ln x - m}{\sigma} \right)$$

حيث $Q(\cdot)$ هو تكامل الاحتمال التراكمي التكميلي الطبيعي. ويمكن تقدير المعلمتين m و σ من مجموعة من أزواج n من (G_i, x_i) على النحو الموصوف في الفقرة التالية.

2 الإجراء

يُجرى تقدير المعلمتين اللوغاريتميتين الطبيعيين m و σ كما يلي:

الخطوة 1: إنشاء مجموعة أزواج n من (G_i, x_i) ، حيث G_i هي الاحتمال الذي تتجاوزه x_i .

الخطوة 2: تحويل مجموعة الأزواج n من (G_i, x_i) إلى $(Z_i, \ln x_i)$ حيث:

$$Z_i = \sqrt{2} \operatorname{erfc}^{-1}(2G_i) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2G_i) \text{ or equivalently, } Z_i = Q^{-1}(G_i)$$

الخطوة 3: تحديد المتغيرين m و σ من خلال إجراء المطابقة بالمربعات الصغرى للدالة الخطية:

$$\ln x_i = \sigma Z_i + m$$

كما يلي:

$$\sigma = \frac{n \sum_{i=1}^n Z_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n Z_i \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n \sum_{i=1}^n Z_i^2 - \left[\sum_{i=1}^n Z_i \right]^2}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i - \sigma \sum_{i=1}^n Z_i}{n}$$
