

RECOMMANDATION UIT-R S.1529

Méthode analytique de détermination des statistiques de brouillage entre systèmes du service fixe par satellite non géostationnaire et autres systèmes du service fixe par satellite non géostationnaire ou réseaux du service fixe par satellite géostationnaire

(Question UIT-R 231/4)

(2001)

L'Assemblée des radiocommunications de l'UIT,

considérant

- a) que les émissions des stations terriennes ainsi que des stations spatiales de systèmes à satellites (service fixe par satellite (SFS) géostationnaire (OSG), SFS non OSG, liaisons de connexion de services mobiles à satellites (SMS) non OSG) du SFS peuvent causer des brouillages à un autre système du même type lorsque les deux systèmes exploitent les mêmes bandes de fréquences;
- b) que, lorsque des systèmes à satellites non OSG sont concernés, le comportement statistique du brouillage, notamment celui lié aux événements à court terme, constitue un facteur important pour des études d'évaluation du brouillage;
- c) qu'il est souhaitable de disposer d'outils fiables et précis pour déterminer le comportement statistique de brouillage entre systèmes qui sont dotés de liaisons cofréquence lorsque l'environnement de brouillage comprend des systèmes à satellites non OSG;
- d) que des méthodes de simulation par ordinateur (voir la Recommandation UIT-R S.1325) peuvent nécessiter un temps de calcul excessivement long pour s'assurer que tous les événements de brouillage sont pris en compte et qu'en conséquence, des résultats statistiquement significatifs sont obtenus,

recommande

1 que la méthode analytique présentée à l'Annexe 1 soit considérée comme une méthode pouvant être utilisée pour obtenir des distributions de probabilité cumulative de brouillage cumulatif pour évaluer le brouillage entre systèmes dotés de liaisons cofréquence lorsque l'environnement de brouillage comprend des systèmes à satellites non OSG.

ANNEXE 1

Méthode analytique d'évaluation du brouillage dans des environnements de brouillage impliquant des systèmes à satellites non OSG**1 Introduction**

La plupart des méthodes existantes visant à évaluer un brouillage impliquant des systèmes à satellites non OSG s'appuient sur une simulation directe par ordinateur. Ces méthodes sont généralement longues et nécessitent un nouveau cycle de simulation prolongé chaque fois qu'une modification est apportée à l'un des systèmes ou des paramètres système. De plus, dans des

situations complexes, impliquant un grand nombre de stations terriennes et de satellites non OSG, ces méthodes peuvent nécessiter un temps de calcul très long pour produire des résultats statistiquement significatifs. La présente Annexe décrit une méthode analytique qui peut être mise en œuvre au moyen de techniques numériques et qui permet d'effectuer une évaluation de la sensibilité au brouillage de systèmes et de paramètres système sans avoir à recourir à des cycles de simulation par ordinateur prolongés. En outre, à l'inverse des résultats obtenus par simulation, les résultats obtenus par cette approche analytique correspondent à un nombre illimité de jours simulés et, par conséquent, ne présentent pas, sur ce plan, la nécessité de cycles de calcul prolongés, comme peuvent l'exiger des méthodes de simulation par ordinateur lorsqu'elles cherchent à garantir des résultats statistiquement significatifs.

Cette méthode s'appuie sur la connaissance de la fonction de densité de probabilité de la position d'un satellite unique placé sur une orbite présentant une inclinaison arbitraire. Pour illustrer la capacité d'application de la méthode proposée à des environnements de brouillage complexes, les résultats de quelques situations spécifiques sont présentés. Des comparaisons entre les résultats obtenus au moyen de la méthode proposée et ceux produits par un logiciel de simulation du commerce largement utilisé ont indiqué que la méthode proposée est susceptible de générer des résultats fiables et précis tout en nécessitant un temps de calcul moindre.

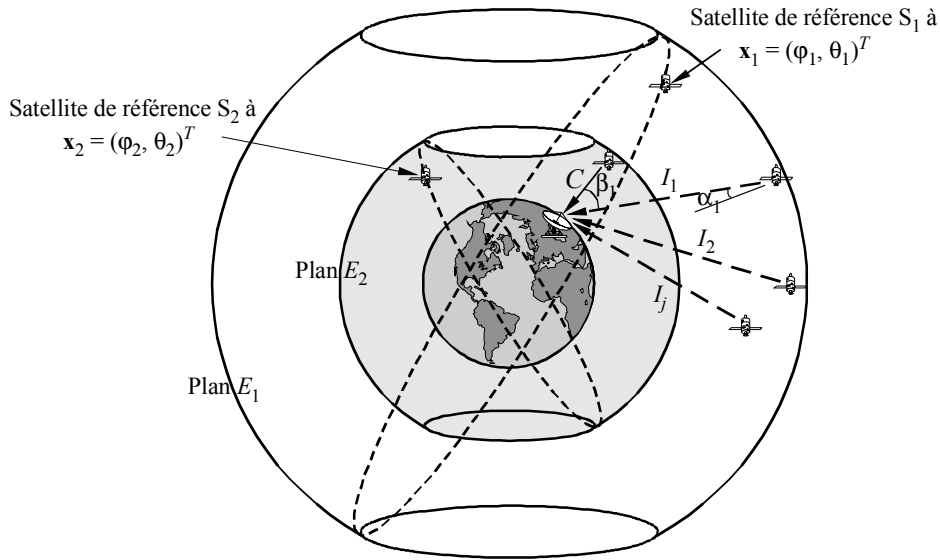
2 Méthode

Soit un environnement de brouillage impliquant n systèmes non OSG. L'approche utilisée dans la présente Recommandation pour évaluer le brouillage dans un tel environnement prend en compte le fait que, une fois que la position d'un satellite donné (appelé ici satellite de référence) dans chaque constellation est connue, les niveaux de brouillage cumulatif affectant les récepteurs de tout système brouillé dans l'environnement (si l'on considère que tous les paramètres système sont fournis) peuvent être déterminés de manière univoque. Cette approche fait en outre l'hypothèse que les positions de ces satellites de référence sont caractérisées par des vecteurs aléatoires statistiquement indépendants. A partir de ces hypothèses, les niveaux de puissance de signal utile et brouilleur peuvent être considérés comme des variables aléatoires qui sont des fonctions déterministes des positions des satellites de référence, et, en conséquence, leurs fonctions de densité de probabilité peuvent être déterminées si les fonctions de densité de probabilité modélisant les positions de chacun des n satellites de référence sont connues.

Considérons par exemple la situation illustrée à la Fig. 1. Cette Figure illustre deux systèmes à satellites non OSG ayant tous deux une orbite circulaire et des constellations de satellites arbitraires. Les satellites du Système 1 se déplacent sur le plan E_1 et les satellites du Système 2 sur le plan E_2 . Des satellites de référence pour chacun des deux Systèmes sont également représentés. Dans cet exemple, on considère le brouillage cumulatif en liaison descendante émis par les satellites du Système 1 et subi par une station terrienne donnée du Système 2. Compte tenu que le satellite de référence S_i du Système i ($i = 1, 2$) se situe à la longitude φ_i et à la latitude θ_i , les positions de tous les autres satellites des deux constellations peuvent être déterminées de manière unique en fonction des deux vecteurs de localisation $\mathbf{x}_1 = (\varphi_1, \theta_1)^T$ et $\mathbf{x}_2 = (\varphi_2, \theta_2)^T$. En conséquence, si l'on considère, par exemple, que l'antenne de la station terrienne pointe toujours vers le satellite le plus proche de la constellation de son système et que tous les autres paramètres système, tels que les diagrammes de rayonnement de l'antenne du satellite et de la station terrienne, la p.i.r.e., etc., sont connus, il est possible de calculer à la fois le brouillage cumulatif sur la liaison descendante I et le niveau de signal utile C pour la station terrienne considérée pour chaque paire de valeurs des vecteurs $\mathbf{x}_i = (\varphi_i, \theta_i)^T$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\delta_i \leq \theta_i \leq \delta_i$ où $i = 1, 2$, (δ_i représente l'angle entre le plan équatorial et le plan contenant l'orbite de S_i). Si ces deux vecteurs sont modélisés sous la forme de vecteurs aléatoires statistiquement indépendants avec des fonctions de densité de probabilité connues

$p_{x_i}(\Phi, \Theta), i=1, 2$, alors le niveau de signal utile $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ et le brouillage cumulatif $I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ correspondent à des variables aléatoires dont la caractérisation statistique, c'est-à-dire la fonction de densité de probabilité ou la fonction de distribution cumulative (CDF), peut être obtenue à partir de $p_{x_i}(\Phi, \Theta), i=1, 2$ au moyen de méthodes analytiques et/ou numériques.

FIGURE 1
Environnement de brouillage impliquant deux systèmes à satellites non OSG



1529-01

La fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta)$ de la position (longitude et latitude) d'un satellite placé sur une orbite elliptique autour de la Terre peut être démontrée comme étant égale à (voir l'Appendice 1 de la présente Annexe):

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)P(AM) + p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)P(DM) \quad (1)$$

où $p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)$ et $p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)$ sont les fonctions de densité de probabilité de la position du satellite (longitude et latitude) lorsque le satellite est en mode ascendant ou descendant respectivement. Ces fonctions de densité de probabilité conditionnelles sont données par:

$$p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(AM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (2)$$

et

$$p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(DM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (3)$$

avec $P(AM)$ et $P(DM)$ donnés par les formules (60) et (61).

Notez que l'équation (1) peut également être écrite sous la forme:

$$p_x(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right)^2 + \left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right)^2 \right] & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (4)$$

Dans les équations (2), (3) et (4), δ est l'angle entre le plan orbital et le plan équatorial,

$$k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (5)$$

où e indique l'excentricité de l'orbite et

$$g(\Theta) = \cos \omega \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta} + \sin \omega \sin \Theta \quad (6)$$

où ω est l'argument du périégée.

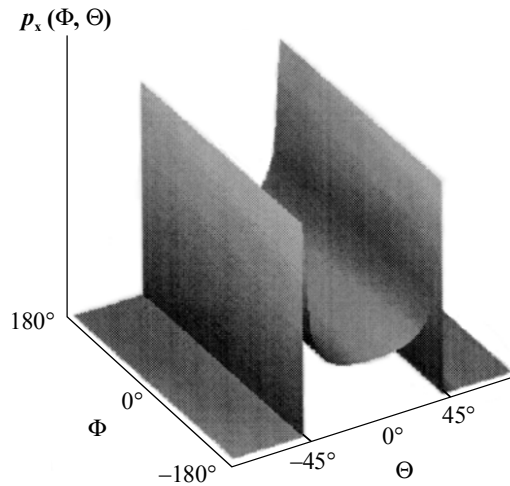
Dans le cas particulier d'orbites circulaires ($e = 0 \rightarrow k = 1$), l'équation (1) est ramenée à:

$$p_x(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} & \text{pour } -\delta < \Theta < \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (7)$$

Cette fonction de densité de probabilité est illustrée à la Fig. 2 pour un satellite placé sur une orbite circulaire sur un plan incliné à 45° par rapport au plan équatorial.

FIGURE 2

Fonction de densité de probabilité $p_x(\Phi, \Theta)$ de la position d'un satellite placé sur une orbite circulaire sur un plan incliné à 45° par rapport au plan équatorial



1529-02

3 Procédure pour obtenir la CDF du brouillage

Pour simplifier, supposons qu'il n'y ait qu'un seul système non OSG intervenant dans l'environnement de brouillage. La longitude et la latitude du satellite de référence de ce système à satellites non OSG prennent des valeurs dans un plan φ - θ ($-\pi < \varphi \leq \pi, -\delta \leq \theta \leq \delta$). Dans une première étape, ce plan est finement partitionné en petites cellules rectangulaires. Pour chacune de ces cellules de partitionnement, on suppose que le satellite de référence se trouve en son centre, puis on détermine, pour cette condition, la position de tous les autres satellites de la constellation. Nous notons qu'il existe deux configurations de constellation possibles associées à une position donnée du satellite de référence: la première correspondant au satellite en mode ascendant et la deuxième au

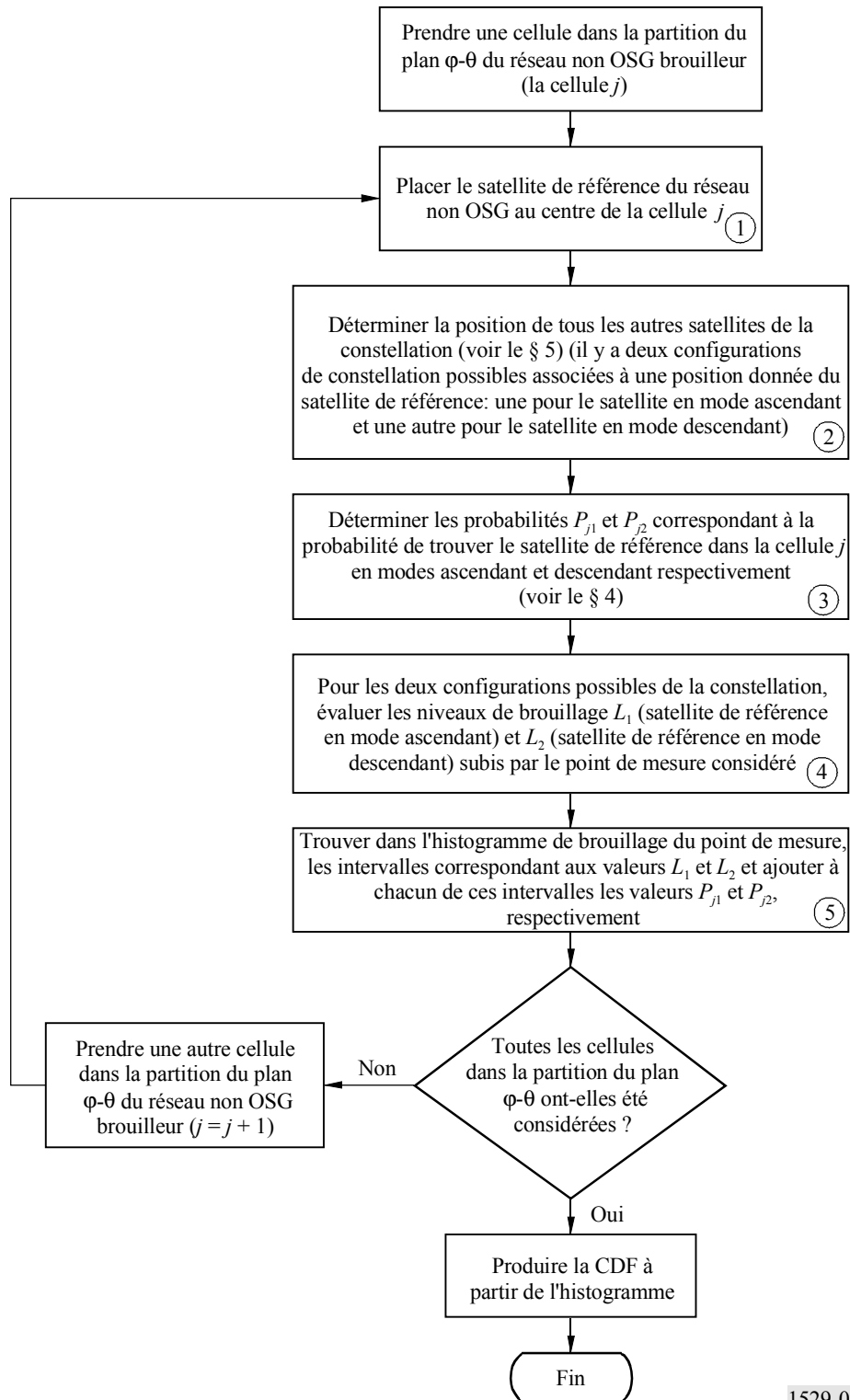
satellite en mode descendant, ces deux situations ayant été prises en compte. Pour chacune des deux configurations de constellation, une fois la position de tous les satellites connue, le niveau de brouillage cumulatif subi par le point de mesure considéré est évalué. Pour produire la distribution de probabilité d'une version quantifiée du brouillage cumulatif, les deux valeurs obtenues (mode ascendant et mode descendant) sont quantifiées aux niveaux de quantification les plus proches et les probabilités correspondantes de trouver un satellite de référence dans la cellule considérée, obtenues en utilisant les équations (2) et (3), sont ajoutées aux valeurs courantes de la probabilité associée aux deux niveaux de quantification correspondants. Cette procédure est ensuite répétée pour toutes les cellules de partitionnement et l'histogramme ainsi obtenu est intégré pour produire la CDF recherchée. L'organigramme de la Fig. 3 illustre la procédure décrite ci-dessus.

Concernant la procédure décrite dans les précédents paragraphes, il y a lieu de formuler les observations suivantes:

- Bien que la partition du plan φ - θ en cellules rectangulaires ne doit pas nécessairement être une partition du type grille, les partitions du type grille utilisées sont pratiques à des fins de mise en œuvre. Toutefois, afin d'éviter un temps de traitement par ordinateur excessif lorsqu'on applique la méthode analytique proposée à des situations complexes impliquant un grand nombre de stations terriennes et de satellites, il convient de prendre en considération les points suivants.
 - La grille de quantification du plan φ - θ doit être suffisamment fine pour détecter les variations rapides des niveaux de brouillage qui se produisent au voisinage de configurations de brouillage avec alignement. Toutefois, une quantification fine de la totalité du plan φ - θ pourrait conduire à un temps de traitement excessif. Aussi, la mise en œuvre numérique de la méthode analytique peut, facultativement, être scindée en deux parties. La première partie concerne les calculs dans les régions du plan φ - θ où le niveau de brouillage peut varier fortement (au voisinage d'une configuration de brouillage avec alignement) et où une quantification fine de la région est requise. Dans la seconde partie de la procédure numérique, les calculs sont effectués dans les régions du plan φ - θ où le niveau de brouillage varie lentement, ce qui autorise une quantification moins fine. Trouver les régions du plan φ - θ associées à des possibilités de configuration de brouillage avec alignement revient à définir des régions telles que, lorsque le satellite de référence se trouve à l'intérieur d'une de ces régions, des événements de brouillage avec alignement impliquant un ou plusieurs satellites de la constellation sont possibles. Le point important ici est de garantir que lorsque le satellite de référence ne se trouve pas dans l'une de ces régions, il n'y a pas de configuration de brouillage avec alignement et il est possible d'utiliser une grille de quantification moins fine. Les régions de brouillage potentiel avec alignement (**RPII**, *regions of potential in-line interference*) sont en général définies comme des régions rectangulaires situées au voisinage des points de brouillage potentiel avec alignement (**PPII**, *points of potential in-line interference*). Ces points **PPII** peuvent être déterminés au moyen de la méthode décrite au § 6.
 - Après avoir détecté les possibilités d'occurrence d'un brouillage avec configuration de quasi-alignement (le satellite de référence se trouve à l'intérieur d'une des régions **RPII**), il est important d'identifier les satellites et les stations terriennes qui sont concernés. Ainsi, les calculs de brouillage peuvent être effectués en considérant que seules quelques données de brouillage (celles associées à l'événement de brouillage avec alignement) doivent être recalculées lorsque le satellite de référence change de position à l'intérieur de la région **RPII** considérée. Il est possible ainsi d'économiser une partie importante du temps de traitement lorsqu'un nombre important de sources de brouillage sont présentes.

FIGURE 3

Organigramme de la méthode analytique



1529-03

- Connaissant la position du satellite de référence, la détermination de la position de tous les autres satellites dans la constellation (bloc ③ de l'organigramme de la Fig. 3) est un problème à deux solutions possibles. Cela résulte du fait que deux plans orbitaux différents, ayant la même inclinaison, peuvent contenir le satellite de référence. En fait, l'une de ces solutions suppose que le satellite de référence est en mode ascendant et l'autre qu'il est en mode descendant. Les deux solutions doivent être prises en

considération dans la procédure proposée. Dans le cas d'orbites circulaires, la détermination de ces solutions n'est pas une tâche complexe, étant donné que l'altitude des satellites est déjà connue. En revanche, pour les satellites situés sur des orbites elliptiques, la procédure est plus complexe, étant donné que les altitudes des satellites évoluent avec le temps (voir le § 5).

4 Probabilités pour que le satellite de référence se trouve à l'intérieur d'une cellule rectangulaire et en modes ascendant et descendant

Supposons qu'une cellule rectangulaire dans le plan φ - θ (par exemple la cellule j), soit définie par $\varphi \in (\varphi_m, \varphi_M)$, $\theta \in (\theta_m, \theta_M)$. Supposons également que P_{j1} et P_{j2} représentent respectivement la probabilité de trouver le satellite de référence dans la cellule rectangulaire j en mode ascendant et la probabilité de trouver le satellite de référence dans la cellule rectangulaire j en mode descendant. Ces deux probabilités peuvent être obtenues en intégrant respectivement ces deux termes dans la partie droite de l'équation (1) en prenant les valeurs de $P(AM)$ et $P(DM)$ calculées au moyen des équations (60) et (61). On obtient alors:

$$P_{jn} = \frac{\varphi_M - \varphi_m}{2\pi} \left[f(c_M, (n-1)\pi - (-1)^n \omega) - f(c_m, (n-1)\pi - (-1)^n \omega) \right] \quad \text{pour } n = 1, 2 \quad (8)$$

avec

$$f(x, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\infty < x \leq -\pi \\ Q_{ek} \left(\frac{x - \omega}{2} \right) - Q_{ek} \left(\frac{-\pi - \omega}{2} \right) & \text{pour } -\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{pour } \pi < x < \infty \end{cases} \quad (9)$$

où:

$$Q_{ek}(x) = \frac{1}{\pi} \arctg \left(\frac{\text{tg}(x)}{k} \right) + \frac{1}{2} \left[\text{sgn} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \text{sgn} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] - \frac{k e}{\pi} \frac{\text{tg}(x)}{\text{tg}^2(x) + k^2} \quad (10)$$

où $\text{sgn}(\)$ désigne la fonction signe. Dans l'équation (8),

$$c_m = \arcsin \left(\frac{\sin \theta_m}{\sin \delta} \right) \quad (11)$$

et

$$c_M = \arcsin \left(\frac{\sin \theta_M}{\sin \delta} \right) \quad (12)$$

Dans le cas d'orbites circulaires, compte tenu que $\omega = 0$ et $e = 0 \rightarrow k = 1$, l'équation (9) se ramène à:

$$f(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\infty < x \leq -\pi \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\pi} \right) & \text{pour } -\pi < x \leq \pi \\ 1 & \text{pour } \pi < x \leq \infty \end{cases} \quad (13)$$

5 Détermination de la position de tous les satellites de la constellation

Dans le présent paragraphe, les notations et définitions suivantes sont utilisées.

\mathbf{u}	Vecteur unitaire dans la direction du satellite de référence
δ	Angle d'inclinaison de l'orbite (rad)
β	Espacement angulaire du satellite à l'intérieur du plan orbital (en termes d'anomalie moyenne) (rad)
Ψ	Angle entre les intersections des plans orbitaux adjacents et du plan équatorial (rad)
λ	Phasage des satellites entre plans (rad)
r	Rayon de l'orbite (orbite circulaire) (km)
a	Demi-grand axe de l'orbite elliptique (km)
e	Excentricité de l'orbite
ω	Argument du périégée (rad)
\mathbf{k}_z	Vecteur unitaire dans la direction de l'axe des z
γ_ℓ	Anomalie vraie du satellite de référence dans la configuration de constellation ℓ , mesurée à partir de la ligne des noeuds (rad)
ν_ℓ	Anomalie vraie du satellite de référence dans la configuration de constellation ℓ (rad)
E_ℓ	Anomalie d'excentricité du satellite de référence dans la configuration de constellation ℓ (rad)
M_ℓ	Anomalie moyenne du satellite de référence dans la configuration de la constellation ℓ (rad)
$(M_i^j)_\ell$	Anomalie moyenne du $i^{\text{ème}}$ satellite du $j^{\text{ème}}$ plan orbital, correspondant à la configuration de la constellation ℓ (rad)
$(E_i^j)_\ell$	Anomalie d'excentricité du $i^{\text{ème}}$ satellite du $j^{\text{ème}}$ plan orbital, correspondant à la configuration de la constellation ℓ (rad)
$J_n(\cdot)$	Fonction de Bessel de première classe et d'ordre n
$(\nu_i^j)_\ell$	Anomalie moyenne du $i^{\text{ème}}$ satellite dans le $j^{\text{ème}}$ plan orbital, correspondant à la configuration de constellation ℓ (rad)
$(\mathbf{u}_i^j)_\ell$	Vecteur unitaire dans la direction du $i^{\text{ème}}$ satellite dans le $j^{\text{ème}}$ plan orbital, correspondant à la configuration de constellation ℓ
$(\mathbf{p}_i^j)_\ell$	Vecteur de position du $i^{\text{ème}}$ satellite dans le $j^{\text{ème}}$ plan orbital, correspondant à la configuration de constellation ℓ
$(r_i^j)_\ell$	Distance, depuis le centre de la Terre, du $i^{\text{ème}}$ satellite dans le $j^{\text{ème}}$ plan orbital correspondant à la configuration de constellation ℓ (km)
$N_{\text{Satparplan}}$	Nombre de satellites par plan orbital
N_{Plans}	Nombre de plans orbitaux de la constellation

Considérons un système géocentrique, OSG de coordonnées rectangulaires dans lequel les axes x et y appartiennent au plan équatorial et l'axe des z pointe vers le nord. Soit \mathbf{u} le vecteur unitaire pointant vers le satellite de référence et $(\mathbf{p}_i^j)_\ell$ le vecteur caractérisant la position du $i^{\text{ème}}$ satellite dans le $j^{\text{ème}}$ plan orbital, correspondant à la configuration de la constellation $\ell, \ell = 1, 2$. La

procédure ci-après peut être utilisée pour déterminer les emplacements $(\mathbf{p}_i^j)_\ell$ ($i = 0, \dots, N_{Satparplan} - 1, j = 0, \dots, N_{Plans} - 1, \ell = 1, 2$) de tous les satellites des deux configurations de la constellation. La procédure décrite comprend un essai visant à identifier celle des deux configurations correspondant au satellite de référence en mode ascendant et celle correspondant au satellite de référence en mode descendant, comme le préconise la méthode analytique proposée.

Etape 1: Soit $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$, calculons, pour $\ell = 1, 2$, les vecteurs unitaires \mathbf{n}_ℓ définis par:

$$\mathbf{n}_\ell = \begin{pmatrix} (-u_z \cos \delta - a_\ell u_y) / u_x \\ a_\ell \\ \cos \delta \end{pmatrix} \quad (14)$$

avec:

$$a_\ell = \frac{-u_y u_z \cos \delta + (-1)^\ell u_x \sqrt{(u_x^2 + u_y^2) \sin^2 \delta - u_z^2 \cos^2 \delta}}{u_x^2 + u_y^2}$$

Etape 2: Soit \mathbf{k}_z le vecteur unitaire dans la direction de l'axe z et calculons les quantités suivantes pour $\ell = 1, 2$:

$$\mathbf{w}_\ell = \mathbf{k}_z \times \mathbf{n}_\ell \quad (\times \text{ désigne le produit croisé})$$

$$\gamma_\ell = \arccos \left(\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{w}_\ell}{|\mathbf{w}_\ell|} \right) \text{sgn}(u_z) \quad (15)$$

(T désigne la transposée et $\text{sgn}()$ la fonction signe)

$$v_\ell = (\gamma_\ell - \omega)_{MOD \ 2\pi}$$

(pour l'ensemble de la présente Annexe, $(x)_{MOD \ 2\pi}$ est défini dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$)

$$E_\ell = 2 \arctg \left(\frac{\text{tg}(v_\ell / 2)}{k} \right)$$

$$\text{où } k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$M_\ell = E_\ell - e \sin E_\ell$$

$$(M_i^j)_\ell = M_\ell + i\beta + j\lambda \quad (16)$$

$$(E_i^j)_\ell = (M_i^j)_\ell + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin(n(M_i^j)_\ell)$$

$$(v_i^j)_\ell = 2 \arctg \left(k \text{tg} \frac{(E_i^j)_\ell}{2} \right)$$

$$(\alpha_i^j)_\ell = (v_i^j)_\ell - v_\ell$$

Il est à noter que la quantité β dans l'équation (16) est habituellement donnée par l'expression:

$$\beta = \frac{2\pi}{N_{Satparplan}}$$

Note importante: Les valeurs de γ_ℓ déterminées au moyen de l'équation (15) sont utilisées pour identifier celle des deux configurations qui correspond au satellite de référence en mode ascendant et celle qui correspond au satellite de référence en mode descendant. Cette opération s'effectue au moyen du test suivant:

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq |\gamma_\ell| < \pi/2 \rightarrow \text{la configuration } \ell \text{ correspond au satellite de référence en mode ascendant} \\ \text{si } \pi/2 \leq |\gamma_\ell| \leq \pi \rightarrow \text{la configuration } \ell \text{ correspond au satellite de référence en mode descendant} \end{cases} \quad (17)$$

Etape 3: Déterminer les vecteurs de position des satellites dans les deux configurations de la constellation au moyen de la formule:

$$(\mathbf{p}_i^j)_\ell = (r_i^j)_\ell (\mathbf{u}_i^j)_\ell$$

dans laquelle:

$$(r_i^j)_\ell = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos((v_i^j)_\ell)}$$

et

$$(\mathbf{u}_i^j)_\ell = \cos((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{u} - \sin((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{b}_\ell$$

avec:

$$\mathbf{b}_\ell = \mathbf{u} \times \mathbf{n}_\ell$$

et

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos j\psi & -\sin j\psi & 0 \\ \sin j\psi & \cos j\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'angle ψ est généralement donné par la relation:

$$\psi = \frac{2\pi}{N_{Plans}}$$

Dans le cas particulier d'orbites circulaires, étant donné que l'anomalie vraie, l'anomalie d'excentricité et l'anomalie moyenne sont les mêmes, et que $a=r$ et $e=0 \rightarrow k=1$, les Etapes 2 et 3 se ramènent à:

Etape 2:

$$(\alpha_i^j)_\ell = i\beta + j\lambda$$

Etape 3:

$$(\mathbf{p}_i^j)_\ell = r (\mathbf{u}_i^j)_\ell$$

dans laquelle:

$$(\mathbf{u}_i^j)_\ell = \cos((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{u} - \sin((\alpha_i^j)_\ell) \mathbf{M}_j \mathbf{b}_\ell$$

avec:

$$\mathbf{b}_\ell = \mathbf{u} \times \mathbf{n}_\ell$$

et

$$\mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} \cos j\psi & -\sin j\psi & 0 \\ \sin j\psi & \cos j\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Choix des incréments de longitude et de latitude pour les grilles fines et larges

La grille de quantification du plan φ - θ doit être suffisamment fine pour détecter les variations rapides des niveaux de brouillage qui se produisent au voisinage des configurations de brouillage avec alignement. Toutefois, une quantification fine sur tout le plan φ - θ pourrait conduire à un temps de traitement par ordinateur excessif. Aussi, la mise en œuvre numérique de la méthode analytique peut, facultativement, être scindée en deux parties. Dans la première partie, les calculs sont effectués dans les régions du plan φ - θ où le niveau de brouillage peut fortement varier (au voisinage de la configuration de brouillage avec alignement) et où une quantification fine de la région est requise. Ces régions sont appelées ici **RPII**. Dans la deuxième partie de la procédure numérique, on effectue les calculs dans les régions du plan φ - θ dans lesquelles le niveau de brouillage varie lentement, ce qui autorise une quantification moins fine. Il est proposé de choisir les incréments de longitude et de latitude $\Delta\varphi_f$ et $\Delta\theta_f$ pour la grille fine comme suit:

$$\Delta\varphi_f \leq \frac{\Phi}{10} \text{ et } \Delta\theta_f \leq \frac{\Phi}{10} \quad (18)$$

Pour les calculs de brouillage sur la liaison descendante, φ dans l'équation (18) est l'angle géocentrique défini par:

$$\varphi = \frac{1}{2} \Phi_{3\text{dB}} - \arcsin\left(\frac{R_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}} + h} \sin\left(\frac{\Phi_{3\text{dB}}}{2}\right)\right) \quad (19)$$

où:

R_{Terre} : rayon de la Terre

h : altitude maximale de l'orbite

$\Phi_{3\text{dB}}$: ouverture du faisceau de 3 dB (degrés) de l'antenne de la station terrienne brouillée.

Pour le calcul du brouillage sur la liaison montante, φ est également donné par l'équation (19), $\Phi_{3\text{dB}}$ étant l'ouverture du faisceau de 3 dB (degrés) des antennes de la station terrienne brouilleuse.

Pour les calculs de brouillage intersatellites (un satellite placé sur une orbite plus basse passant par le faisceau principal du satellite brouillé placé sur une orbite plus haute), φ dans l'équation (18) est l'angle géocentrique défini par:

$$\varphi = \arctg\left(2\sqrt{1-\left(\frac{R_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}+h}\right)^2} \left[\frac{R_{\text{Terre}}+H}{R_{\text{Terre}}+h} \sqrt{1-\left(\frac{R_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}+H}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{R_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}+h}\right)^2}\right] \sin\left(\frac{\Phi_{3\text{dB}}}{2}\right)\right) \quad (20)$$

où:

R_{Terre} : rayon de la Terre

h : altitude maximale de l'orbite inférieure

H : altitude maximale de l'orbite supérieure

φ_{3dB} : ouverture de faisceau de 3 dB (degrés) de l'antenne du satellite brouillé.

Les incréments de latitude et de longitude $\Delta\varphi_c$ et $\Delta\theta_c$ pour la grille large doivent être choisis comme suit:

$$\Delta\varphi_c = 1,5\varphi \text{ et } \Delta\theta_c = 1,5\varphi$$

où φ est donné par l'équation (19) pour les calculs de brouillage sur les liaisons montante et descendante et par l'équation (20) pour les calculs de brouillage intersatellites.

Trouver les régions de brouillage potentiel avec quasi alignement du plan φ - θ associées revient à définir des régions telles que, lorsque le satellite de référence se trouve à l'intérieur de l'une de ces régions, des événements de brouillage avec alignement impliquant un ou plusieurs satellites dans la constellation peuvent se produire. Le point important ici est de garantir que lorsque le satellite de référence ne se trouve pas à l'intérieur de l'une de ces régions, il n'y a pas de configuration de brouillage avec alignement et qu'il est possible d'utiliser une grille de quantification moins fine. Les régions **RPII** sont définies comme des régions (généralement rectangulaires) autour des points de **PPII**. Ces points **PPII** peuvent être déterminés au moyen de la méthode décrite au § 7. Il est proposé de définir les régions **RPII** par une région carrée de $\Delta \times \Delta$ degrés autour des points **PPII**, où:

$$\Delta = 5\varphi$$

φ étant donné par l'équation (19) pour les calculs des brouillages sur les liaisons montante et descendante et par l'équation (20) pour les calculs de brouillage intersatellites.

Bien que les valeurs précitées pour les incréments de longitude et de latitude ainsi que la taille de la région **RPII** se soient révélées adéquates dans plusieurs exercices, il se peut qu'elles doivent être ajustées. Une très grande station terrienne (avec des faisceaux très étroits) nécessitera une diminution de la taille des incréments en latitude et en longitude, mais permettra d'utiliser une plus petite région **RPII**. Par ailleurs, les stations terriennes avec un faisceau large permettront d'utiliser des incréments de longitude et de latitude plus grands, mais nécessiteront une région **RPII** plus grande.

7 Détermination des points PPII

Dans le cas où la grille facultative fine est utilisée, il convient de prendre note des points suivants:

7.1 Brouillage sur la liaison montante

Pour chaque satellite OSG brouillé (point de mesure) il faut suivre les Etapes suivantes pour déterminer les points **PPII** dans le cas des calculs de brouillage sur la liaison montante:

Etape 1: Pour chaque station terrienne du système non OSG brouilleur, identifier la position du système à satellites brouilleur qui se trouve en configuration d'alignement avec la station terrienne considérée et le satellite OSG brouillé.

Etape 2: Placer le satellite de référence dans cette position et déterminer la position de tous les autres satellites de la constellation pour les deux configurations possibles, conformément aux indications du § 5.

Etape 3: Ces $N_{stationterriennesnonOSG} \times N_{satellitesnonOSG} \times 2$ positions de satellite constituent l'ensemble des points **PPII**.

Il convient de noter que l'algorithme d'extinction des faisceaux doit garantir que la station terrienne non OSG n'émet pas en direction des satellites non OSG qui se trouvent dans la zone d'exclusion, de sorte que l'utilisation de la grille fine pour la liaison montante n'est pas nécessaire.

7.2 Brouillage sur la liaison descendante

Pour chaque station terrienne du système OSG brouillé (point de mesure), il y a lieu de suivre les Etapes suivantes pour déterminer les points **PPII** dans le cas de calculs de brouillage sur la liaison descendante:

Etape 1: Identifier la position du satellite du système brouilleur qui se trouve en configuration d'alignement avec la station terrienne du système OSG brouillé considéré (point de mesure) et le satellite OSG la desservant.

Etape 2: Placer le satellite de référence dans cette position et déterminer la position de tous les autres satellites de la constellation pour les deux configurations possibles, conformément aux indications du § 5.

Etape 3: Ces $N_{satellitesnonOSG} \times 2$ positions de satellite constituent l'ensemble des points **PPII**.

7.3 Brouillage intersatellites

Pour chaque satellite OSG brouillé (point de mesure), il y a lieu de suivre les Etapes ci-dessous pour déterminer les points **PPII** dans le cas du calcul du brouillage intersatellites:

Etape 1: Soit $N_{faisceauxdesatelliteOSG}$ le nombre de faisceaux cofréquence dans les satellites OSG brouillés considérés. Pour chacun de ces faisceaux, identifier la position du satellite non OSG brouilleur qui se trouve dans l'axe du faisceau.

Etape 2: Placer le satellite de référence dans cette position et déterminer la position de tous les autres satellites de la constellation pour les deux configurations possibles, conformément aux indications du § 5.

Etape 3: Ces $N_{faisceauxdesatelliteOSG} \times N_{satellitesnonOSG} \times 2$ positions de satellite constituent l'ensemble des points **PPII**.

8 Utilisation additionnelle des grilles fines

Des variations rapides de brouillage peuvent se produire lorsque les satellites s'approchent de la limite qui caractérise la zone de l'angle d'exclusion (dans les régions du plan φ - θ dans lesquelles les satellites non OSG ne fonctionnent pas). Au voisinage de cette limite (Région au voisinage de la zone d'exclusion (**EZVR**, *exclusion zone vicinity regions*), des grilles fines peuvent également être utilisées pour mieux détecter ces variations rapides. Il y a lieu de suivre les Etapes ci-dessous pour déterminer ces zones **EZVR**:

Etape 1: Déterminer dans la grille large, les cellules qui contiennent la courbe des limites de la zone d'exclusion. Soit N_{EZ} le nombre de cellules qui remplissent cette condition.

Etape 2: Pour chacune de ces N_{EZ} cellules, placer le satellite de référence en son centre et déterminer la position de tous les autres satellites de la constellation pour les deux configurations possibles, conformément aux indications du § 5, et identifier les cellules de la grille large les contenant.

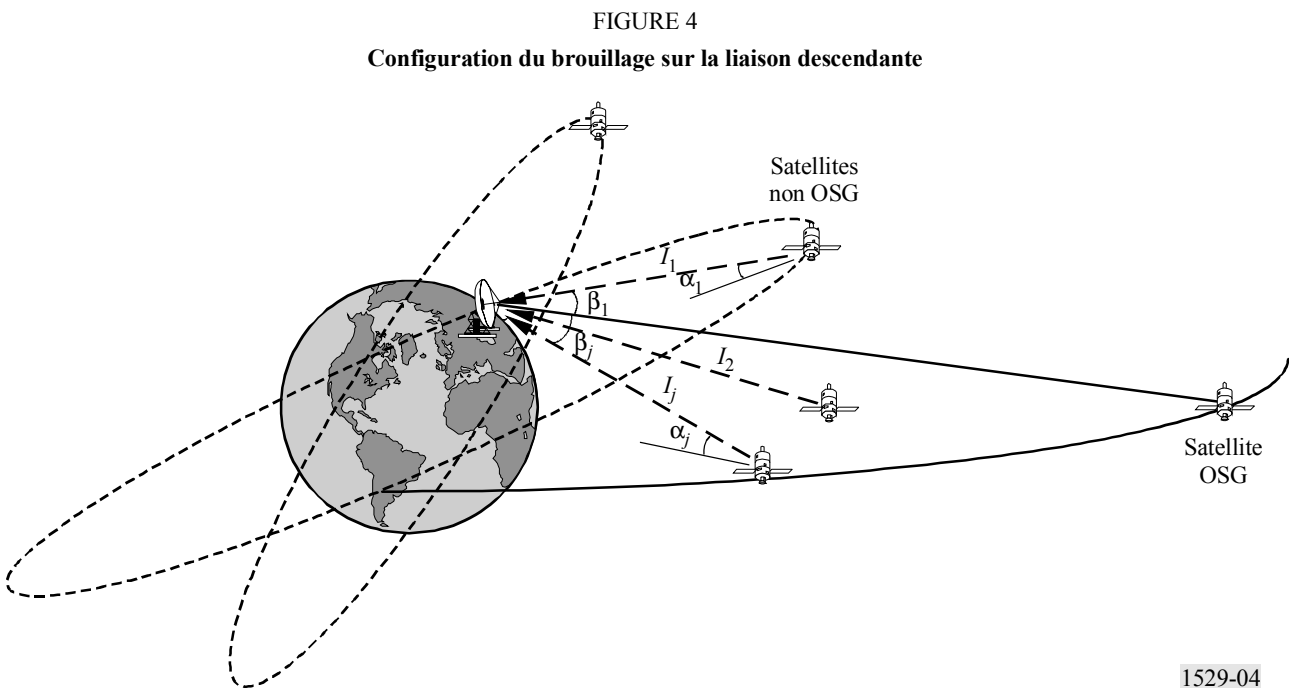
Etape 3: Ces $N_{EZ} \times N_{satellitesnonOSG} \times 2$ cellules de la grille large constitueront l'ensemble des cellules de la grille large à l'intérieur desquelles il faut utiliser une grille plus fine.

9 Exemples numériques

Deux exemples d'application de la méthode analytique sont présentés. L'exemple 1 se rapporte au brouillage cumulé sur la liaison descendante causé par tous les satellites d'un système non OSG et subi par une station terrienne d'un système OSG. Les résultats ainsi obtenus sont comparés à ceux obtenus au moyen d'un logiciel de simulation disponible dans le commerce et largement utilisé. L'exemple 2 illustre les capacités d'application de la méthode proposée à une situation encore plus complexe impliquant le brouillage cumulé sur la liaison montante causé par un grand nombre de stations terriennes d'un système non OSG (chacune possédant plusieurs faisceaux) et subi par un satellite placé sur un point fixe dans le ciel. La plus grande partie des données utilisées dans ces exemples ont été tirées de la Recommandation UIT-R S.1328, à l'exception de celles explicitement signalées dans les exemples.

Exemple 1

Le premier exemple examine le brouillage cumulé sur la liaison descendante causé par l'ensemble des dix satellites sur orbite terrestre basse (LEO) F et subi par une station terrienne d'un système OSG situé à la longitude 0° et à la latitude 30° N, pointant vers un satellite OSG situé à la longitude 0° . Ce cas de figure est illustré à la Fig. 4.



On a supposé que le diagramme de rayonnement de l'antenne était:

$$G_e(\beta) = \begin{cases} 47,5 - 26,8177 \beta^2 & \text{pour } 0^\circ \leq \beta \leq 0,76025^\circ \\ 32 & \text{pour } 0,76025^\circ < \beta \leq 1^\circ \\ 32 - 25 \log \beta & \text{pour } 1^\circ < \beta \leq 48^\circ \\ -10 & \text{pour } 48^\circ < \beta \leq 180^\circ \end{cases}$$

qui correspond au diagramme de la Recommandation UIT-R S.465, pour un diamètre d'antenne égal à 6 m et une fréquence de 5,175 GHz. On a supposé que le diagramme de rayonnement des antennes des satellites non OSG (pour tous les satellites) était de:

$$G_s(\alpha) = \begin{cases} G_{max} - 12 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 & \text{pour } 0 \leq \frac{\alpha}{\alpha_0} < 1,45 \\ G_{max} - \left(22 + 20 \log \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \right) & \text{pour } 1,45 \leq \frac{\alpha}{\alpha_0} \end{cases}$$

avec $G_{max} = 13$ dBi et $\alpha_0 = 52^\circ$. Ceci correspond au diagramme de l'Appendice 30B du Règlement des radiocommunications.

Si on suppose que tous les satellites transmettent la même puissance, la puissance du brouillage cumulatif sur la liaison descendante subi par le récepteur de la station terrienne est proportionnel à la quantité:

$$z = \sum_{i=1}^{10} \frac{G_{s,i}(\alpha_i) G_e(\beta_i)}{d_i^2}$$

où:

$G_{s,i}(\alpha_i)$: $i^{\text{ème}}$ satellite non OSG transmettant un gain d'antenne dans une direction décalée de α_i (degrés) par rapport à l'axe du faisceau principal

$G_e(\beta_i)$: gain de l'antenne de réception de la station terrienne du système OSG dans une direction décalée de β_i (degrés) par rapport à l'axe du faisceau principal

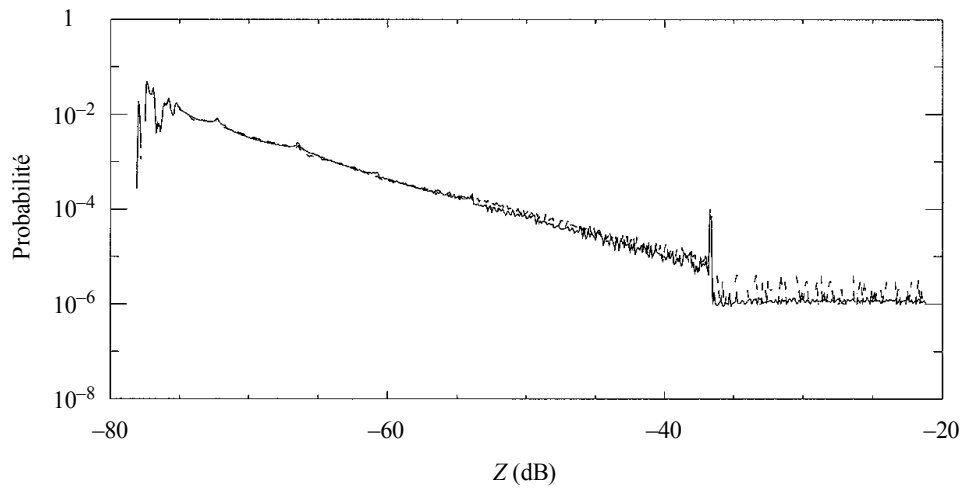
d_i : distance entre le satellite i et la station terrienne brouillée.

La distribution de probabilité, et la CDF correspondante, de la version quantifiée de z (intervalle de quantification de 0,1 dB; d_i (km)) ont été obtenues au moyen de la méthode proposée et également au moyen d'un logiciel de simulation du commerce. La CDF est définie ici sous la forme $CDF(Z) = P(z > Z)$.

La Fig. 5a illustre les résultats obtenus pour les estimations de distribution de probabilité avec la méthode proposée et au moyen d'un cycle de simulation par ordinateur correspondant à une période de 58 jours simulés (1×10^6 pas temporels avec un pas temporel de 5 s). Le temps de traitement machine nécessaire était d'environ 45 min pour les deux méthodes avec un ordinateur PC d'une puissance de 200 MHz. Les Fig. 5b et 5c illustrent, sous la forme d'un schéma élargi, les régions de la Fig. 5a correspondant respectivement aux niveaux de brouillage inférieurs (brouillage du lobe latéral) et aux niveaux de brouillage supérieurs (proches du brouillage avec alignement). On peut remarquer, à partir de ces Figures, qu'une bonne corrélation entre les résultats générés par les deux méthodes a été obtenue dans la zone des niveaux de brouillage inférieurs. Dans le cas des niveaux de brouillage supérieurs, qui se produisent pendant un pourcentage de temps très faible, nous avons remarqué que plusieurs valeurs de z , bien qu'elles présentaient une probabilité positive selon la méthode proposée, n'apparaissaient pas dans les résultats de la simulation. Ceci semble indiquer qu'il peut être nécessaire d'augmenter le nombre de jours simulés pour mieux prendre en compte toutes les possibilités de positionnement des satellites du système. Ces différences sont également prises en compte à la Fig. 6 qui représente les courbes de distribution cumulative obtenues dans la zone des niveaux de brouillage supérieurs. Notez qu'une différence de 1,5 dB peut être observée pour les valeurs de Z correspondant à des probabilités de l'ordre de 1×10^{-4} .

FIGURE 5a

Estimations de la distribution de probabilité obtenue avec l'approche proposée et avec une simulation par ordinateur
(58 jours simulés, pas temporel de 5 s)

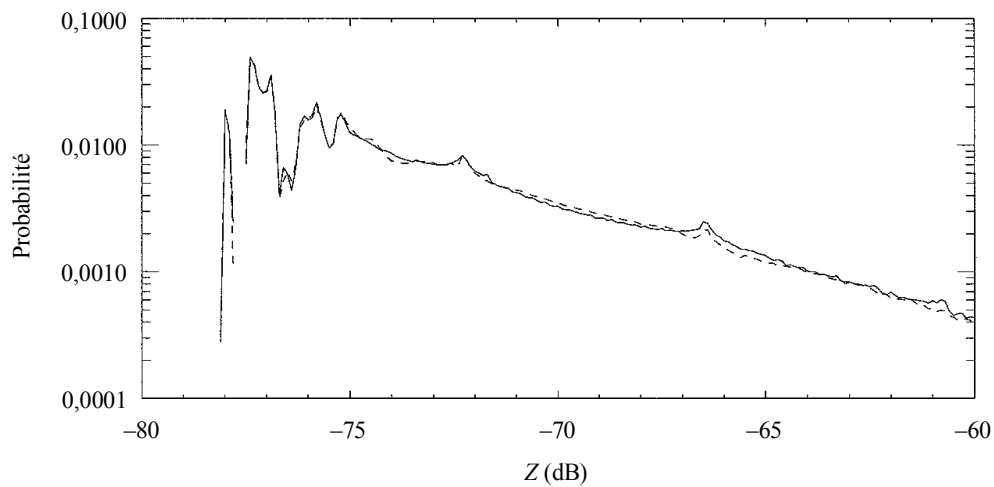


Trait plein: méthode analytique
Trait pointillé: simulation

1529-05a

FIGURE 5b

Estimations de la distribution de probabilité obtenue avec l'approche proposée et avec une simulation par ordinateur - Niveaux de brouillage inférieurs
(58 jours simulés, pas temporel de 5 s)

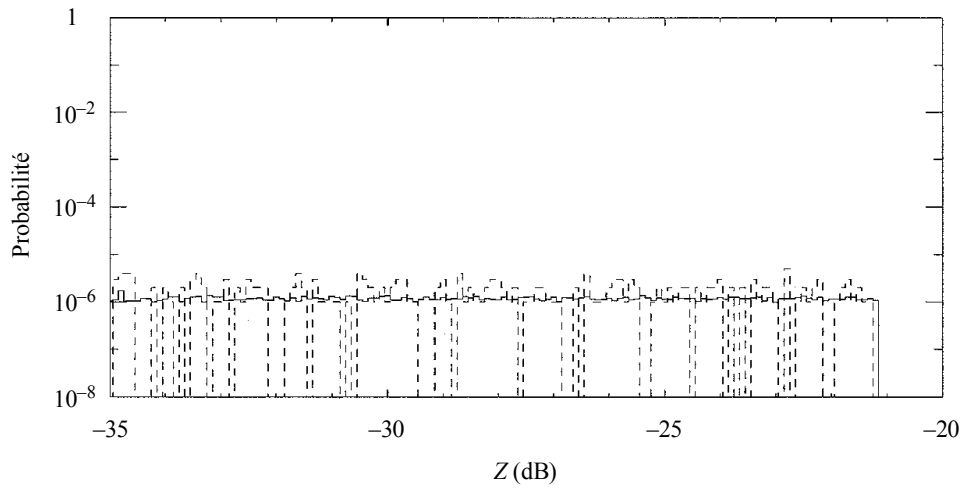


Trait plein: méthode analytique
Trait pointillé: simulation

1529-05b

FIGURE 5c

Estimations de la distribution de probabilité obtenue avec l'approche proposée et avec une simulation par ordinateur - Niveaux de brouillage supérieurs (58 jours simulés, pas temporel de 5 s)

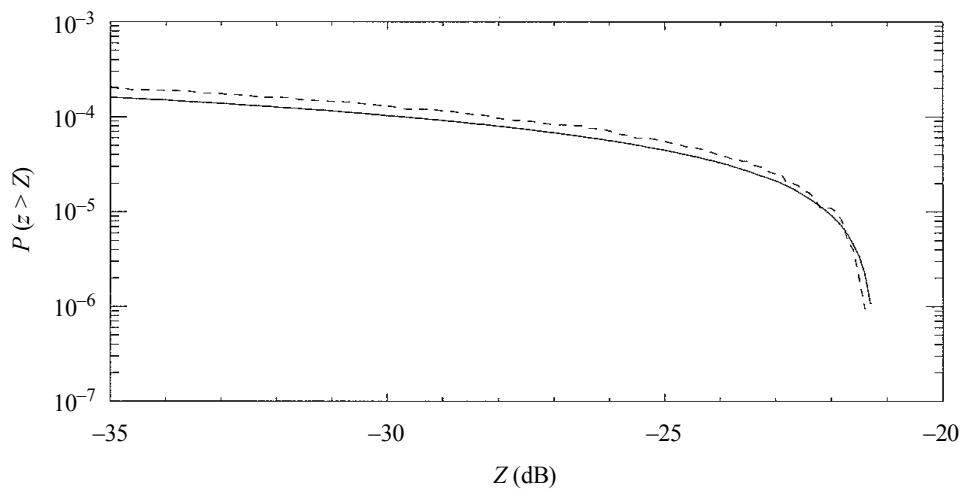


Trait plein: méthode analytique
 Trait pointillé: simulation

1529-05c

FIGURE 6

Estimations de la CDF obtenue avec l'approche proposée et avec une simulation par ordinateur - Niveaux de brouillage supérieurs (58 jours simulés, pas temporel de 5 s)



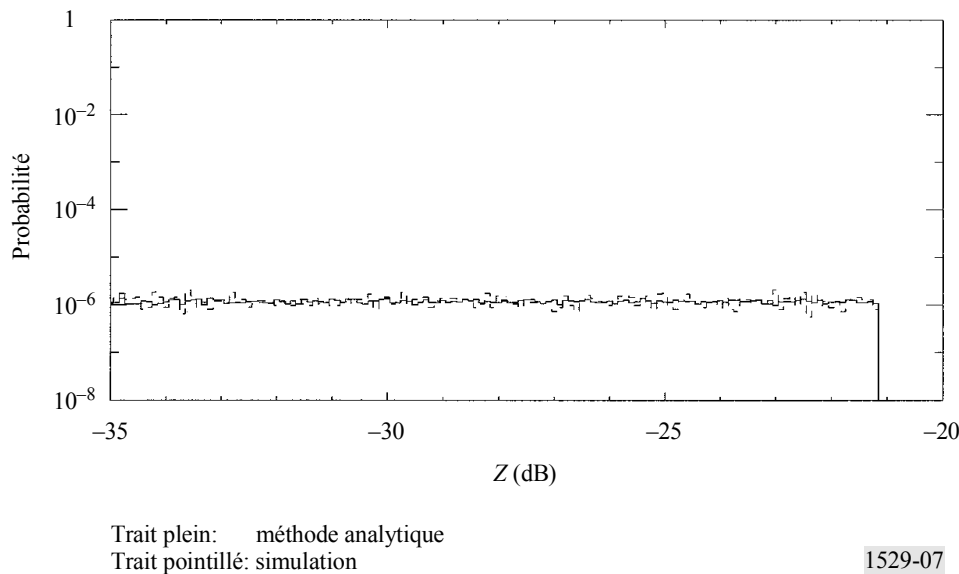
Trait plein: méthode analytique
 Trait pointillé: simulation

1529-06

Pour les résultats de la simulation illustrés à la Fig. 7, le nombre de jours simulés a été porté de 58 à 290 et le pas temporel réduit de 5 à 2 s, ce qui a donné lieu à un temps de simulation par ordinateur d'environ 9 h et 22 min sur un ordinateur PC d'une puissance de 200 MHz. Il convient de noter l'amélioration de la qualité des résultats de la simulation.

FIGURE 7

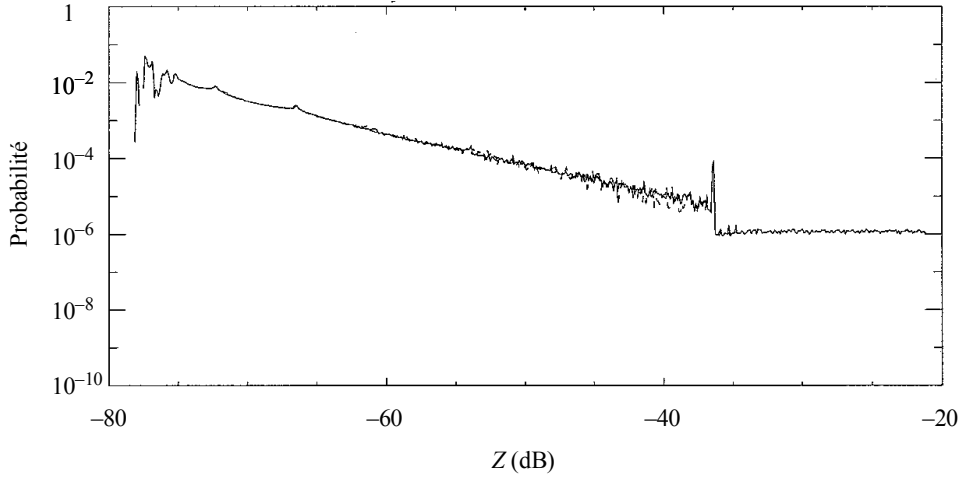
Estimations de la distribution de probabilité obtenue avec l'approche proposée et avec une simulation par ordinateur - Niveaux de brouillage supérieurs (290 jours simulés, pas temporel de 2 s)



Il convient de souligner ici que, contrairement aux résultats générés par simulation, les résultats obtenus au moyen de la méthode analytique proposée correspondent à un nombre infini de jours simulés, et, par conséquent, de ce point de vue, ils ne présentent pas le problème de fiabilité associé aux méthodes de simulation par ordinateur. Pour un environnement de brouillage donné, le temps de traitement nécessaire pour la méthode proposée est fonction de la finesse de la quantification des plans φ - θ des satellites de référence (semblable à la taille du pas temporel des méthodes de simulation par ordinateur). Une quantification plus fine exige plus de temps de traitement pour obtenir une précision plus grande des résultats numériques. Ce point est illustré à la Fig. 8 qui représente les différences entre les estimations de distribution de probabilité obtenues avec la méthode proposée lorsque l'élément de grille utilisé dans les régions de brouillage sans alignement du plan φ - θ passe d'un carré de $0,09^\circ \times 0,09^\circ$ utilisé dans l'exemple précédent à un carré de $0,15^\circ \times 0,15^\circ$, la même dimension étant conservée pour les éléments de grille dans les régions de brouillage avec alignement. Le temps de traitement correspondant a été ramenée de 45 min à 15 min environ.

FIGURE 8

Estimations de distribution de probabilité obtenues avec l'approche proposée pour des quantifications de grille différentes



Trait plein:

zone de brouillage avec alignement: grille de quantification = $0,01^\circ \times 0,01^\circ$

zone de brouillage sans alignement: grille de quantification = $0,09^\circ \times 0,09^\circ$

Trait pointillé:

zone de brouillage avec alignement: grille de quantification = $0,01^\circ \times 0,01^\circ$

zone de brouillage sans alignement: grille de quantification = $0,15^\circ \times 0,15^\circ$

1529-08

Exemple 2

Soit deux systèmes non OSG, LEO 1 et LEO 2. Le système à satellites LEO 1 possède la même dynamique orbitale (inclinaison de l'orbite, nombre de plans, nombre de satellites par plan, altitude, etc.) que le système LEO D. Le système à satellites LEO 2 possède la même dynamique orbitale que le système LEO F. Dans ce deuxième exemple, on considère le brouillage sur la liaison montante émis par les stations terriennes du LEO 1 et subi par un satellite du LEO 2. Cette situation est illustrée à la Fig. 9. Sur cette Figure, on suppose que chaque station terrienne possède quatre antennes (faisceaux) pointées vers les satellites du LEO 1 correspondant aux quatre angles d'élévation les plus élevés qui répondent à la contrainte d'angle d'élévation minimal (la constellation contient un total de 48 satellites). Si l'on considère que toutes les stations terriennes de liaison de connexion émettent la même puissance, la puissance de brouillage cumulatif sur la liaison montante subie par un satellite du système LEO 2 (par exemple le satellite i), situé en un point donné, est proportionnelle à la quantité:

$$z_i = \sum_{j=0}^{N_e-1} \sum_{k=0}^{N_a-1} \frac{G_{s,i}(\alpha_{ij}) G_{e,j}(\beta_{ijk})}{d_{ij}^2}$$

où:

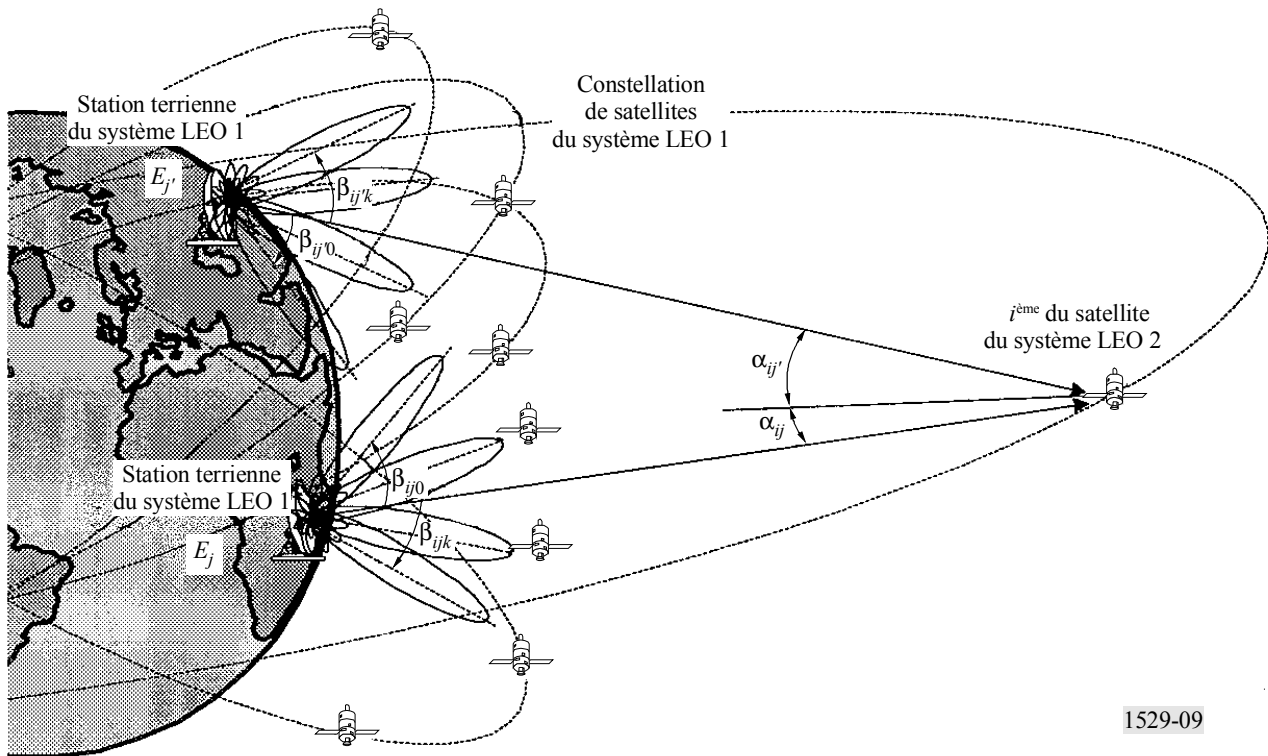
$G_{s,i}(\alpha_{ij})$: gain de l'antenne de réception du satellite i dans une direction décalée de α_{ij} (degrés) par rapport à l'axe du faisceau principal

$G_{e,j}(\beta_{ijk})$: gain de l'antenne d'émission de la station terrienne dans une direction décalée de β_{ijk} (degrés) par rapport à l'axe du faisceau principal

d_{ij} : distance entre le satellite i et la station terrienne j .

Notez que la variable aléatoire z_i est une fonction de la position donnée du satellite brouillé du système LEO 2 considéré et de la position aléatoire du satellite de référence du système LEO 1. Dans l'équation précédente, N_e et N_a représentent, respectivement, le nombre de stations terriennes et le nombre d'antennes (par station terrienne) poursuivant un satellite du système LEO 1 présentant un angle d'élévation supérieur à la valeur minimale prescrite.

FIGURE 9
Configuration du brouillage sur la liaison montante

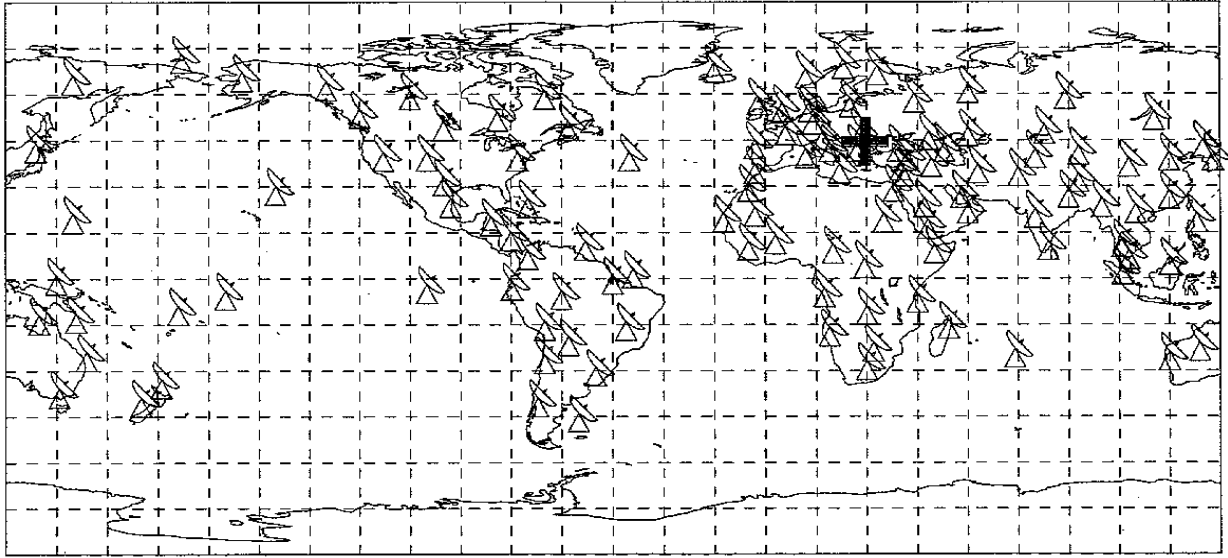


1529-09

Le diagramme de rayonnement de l'antenne d'émission de la station terrienne du système LEO 1 était le même que celui de l'exemple 1. On a considéré que le diagramme de rayonnement de l'antenne de réception du satellite du système LEO 2 avait la même forme que celui donné dans l'exemple 1 mais avec $G_{max} = 12$ dBi et $\alpha_0 = 52^\circ$. On a supposé que l'angle d'élévation de fonctionnement minimal pour les stations terriennes du système LEO 1 était de 5° . Concernant la stratégie de commutation de la station terrienne, on a supposé que chaque passerelle du système LEO 1 contenait quatre antennes de station terrienne qui poursuivent des satellites du système LEO 1 présentant des angles d'élévation supérieurs à la valeur minimale prescrite (5°).

On a obtenu des résultats pour un total de 120 stations terriennes du système LEO 1 (sur l'ensemble de la planète). L'ensemble considéré de positions de stations terriennes est illustré à la Fig. 10 qui indique également la position du satellite du système LEO 2 brouillé (croix noire). La position du satellite LEO 2 a été choisie de telle sorte que le nombre de stations terriennes visibles soit maximal (nombre de stations terriennes visibles = 65). Ainsi, le nombre de sources de brouillage à considérer est maximal.

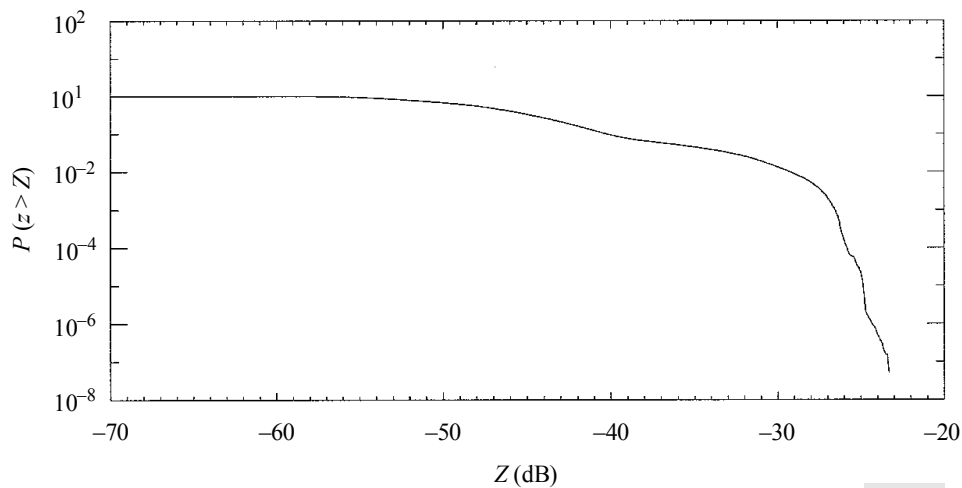
FIGURE 10
 Répartition des stations terriennes du système LEO 1 et position
 du satellite LEO 2 (24,5° E, 44,5° N)



1529-10

Cet exemple illustre la capacité de la méthode analytique proposée de traiter des environnements de brouillage complexes. La Fig. 11 illustre la CDF obtenue au moyen de l'approche proposée pour la variable z , correspondant au brouillage cumulé sur la liaison montante émis par les stations terriennes du système LEO 1 et subi par un satellite du système LEO 2 (120 stations terriennes LEO 1 pour le monde entier). Aucun résultat de simulation n'a été produit pour le cas considéré.

FIGURE 11
 Estimation de la CDF obtenue avec la méthode proposée pour la variable z , correspondant
 au brouillage cumulé sur la liaison montante émis par les stations terriennes
 du système LEO 1 et subi par un satellite du système LEO 2
 (120 stations terriennes LEO 1 pour le monde entier)



1529-11

10 Application de la méthode analytique à des systèmes à satellites non OSG à poursuite répétitive

Si on applique la méthode décrite dans les paragraphes précédents à l'évaluation du comportement statistique d'un brouillage lorsque des systèmes à satellites non OSG à poursuite répétitive sont concernés, il est préférable que la position du satellite de référence soit donnée en fonction de son anomalie moyenne M et de la longitude Ω du noeud ascendant de l'orbite lorsque le satellite se trouve au périégée et non en fonction de sa longitude et de sa latitude comme antérieurement. Dans le cas présent, la position du satellite de référence est représentée par le vecteur $\mathbf{x} = (M, \Omega)^T$, $-\pi < M \leq \pi$, $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. Soit alors $p_{\mathbf{x}}(\eta, G)$ la fonction de densité de probabilité du vecteur \mathbf{x} . Dans ce cas également, l'objectif est de modéliser M sous la forme d'une variable aléatoire et de mesurer la probabilité $P(M \in \Delta)$ au moyen de la fraction de la période T (période de révolution du satellite) pendant laquelle $M(t)$ prend des valeurs dans l'intervalle Δ . Dans cette hypothèse, on peut aisément démontrer que la fonction de densité de probabilité de M est donnée par la formule:

$$p_M(\eta) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{pour } -\pi < \eta \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (21)$$

Par ailleurs, la longitude Ω du noeud ascendant de l'orbite lorsque le satellite se trouve à son périégée peut être modélisée de manière satisfaisante sous la forme d'une variable aléatoire avec une distribution de probabilité uniforme dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et statistiquement indépendante de M (voir l'Appendice 1 à la présente Annexe). Dans le cas particulier de satellites à poursuite répétitive, Ω est une variable aléatoire discrète qui prend une valeur dans l'ensemble fini $\{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_k, \dots, \Omega_{N-1}\}$, où Ω_k représente la longitude de noeuds ascendants successifs (lorsque le satellite se trouve à son périégée) donnée par la formule:

$$\Omega_k = (\Omega_0 - k\Delta\Omega_{AN})_{MOD\ 2\pi} \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1 \quad (22)$$

où $\Delta\Omega_{AN}$ désigne l'espacement longitudinal entre passages ascendants successifs par le plan équatorial. La fonction de densité de probabilité de Ω est donnée par la formule:

$$p_{\Omega}(G) = \sum_{k=0}^{N-1} P(\Omega = \Omega_k) \delta(G - \Omega_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta(G - \Omega_k) \quad (22a)$$

où $\delta(\)$ désigne la fonction delta de Dirac. Enfin, en considérant l'équation (21) et l'indépendance statistique de M et Ω , nous obtenons:

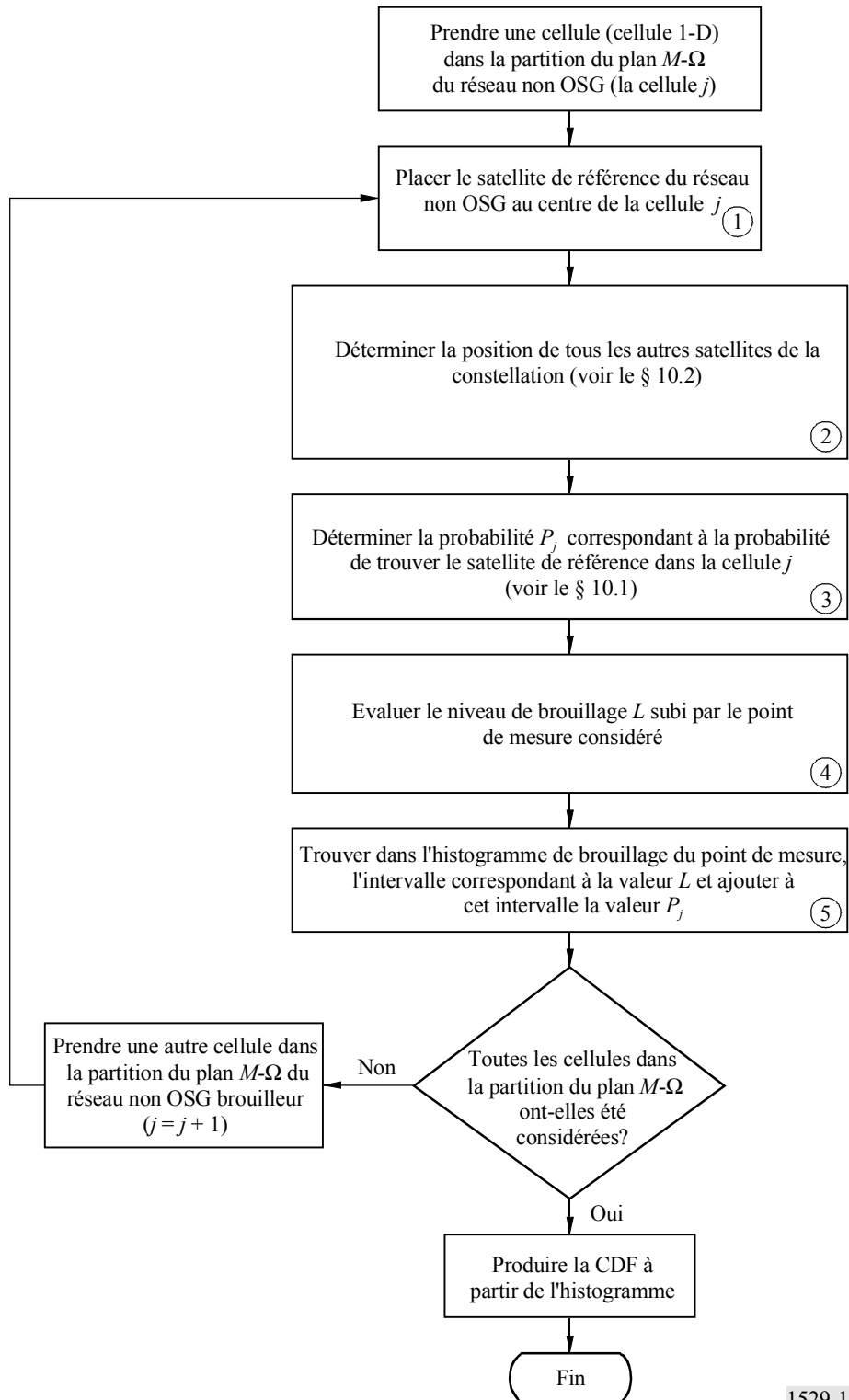
$$p_{\mathbf{x}}(\eta, G) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta(G - \Omega_k) \quad \begin{matrix} \text{pour } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{matrix} \quad (23)$$

De plus, dans le cas particulier de satellites à poursuite répétitive, l'application de la méthode analytique implique de varier la position du satellite de référence de sorte que toutes les valeurs de la paire (M, Ω) avec $M \in (-\pi, \pi)$ et $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$ soient visitées. Cette opération s'effectue par la segmentation de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ (dans lequel M prend ses valeurs) en petits intervalles, produisant ainsi, dans le plan M - Ω , un ensemble de cellules à une dimension (cellules 1-D) qui sont définies par ces petits intervalles et par toute valeur donnée de $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$. Comme antérieurement, il est important de calculer la probabilité de trouver le satellite de référence dans l'une quelconque de ces cellules 1-D.

L'organigramme de la Fig. 12 illustre la procédure d'application de la méthode analytique à des satellites à poursuite répétitive.

FIGURE 12

Organigramme de la méthode analytique (satellites à poursuite répétitive)



NOTE 1 – Cette procédure peut également être appliquée à des satellites à poursuite non répétitive. Dans ce cas, Ω est considéré comme étant une variable aléatoire continue, répartie de manière uniforme sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et indépendante de M , et le plan M - Ω est divisé en petites cellules rectangulaires. La probabilité de trouver le satellite de référence dans une cellule rectangulaire (par exemple la cellule j) dans le plan M - Ω , définie par $M \in (M_m, M_M)$, $\Omega \in (\Omega_m, \Omega_M)$, peut être obtenue en intégrant $p_x(\eta, G)$ qui, dans le cas présent, est donné par:

$$p_x(\eta, G) = \frac{1}{4\pi^2} \quad \begin{array}{l} \text{pour } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{array} \quad (24)$$

10.1 Probabilité de trouver le satellite de référence dans une cellule donnée

Comme indiqué auparavant, l'application de la méthode analytique à des satellites à poursuite répétitive nécessite de varier la position du satellite de référence, de façon que toutes les valeurs de la paire (M, Ω) avec $M \in (-\pi, \pi)$ soient visitées. Cette opération s'effectue par une segmentation de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ (dans lequel M prend ses valeurs) en petits intervalles, produisant ainsi, dans le plan M - Ω , un ensemble de cellules à une dimension (cellules 1-D) qui sont définies par ces petits intervalles et par toute valeur donnée de $\Omega \in \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$. La probabilité de trouver le satellite de référence dans une cellule 1-D donnée (par exemple la cellule j) définie, par exemple, par les points du plan M - Ω qui satisfont la condition $\{M_m < M \leq M_M, \Omega = \Omega_i\}$ peut être déterminée à partir de l'équation (23) et est donnée par:

$$P_j = P(M_m < M \leq M_M, \Omega = \Omega_i) = \frac{M_M - M_m}{2\pi N} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (25)$$

NOTE 1 – Comme indiqué antérieurement, il est également possible d'appliquer cette technique à des satellites à poursuite non répétitive. Dans ce cas, Ω est considéré comme étant une variable aléatoire continue, répartie de manière uniforme sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et indépendante de M . Le plan M - Ω est alors divisé en petites cellules rectangulaires. La probabilité de trouver le satellite de référence dans une cellule rectangulaire donnée (par exemple la cellule j) dans le plan M - Ω , définie par $M \in (M_m, M_M)$, $\Omega \in (\Omega_m, \Omega_M)$ peut être obtenue au moyen de la formule (24) et est donné par:

$$P_j = P(M_m < M \leq M_M, \Omega_m < \Omega \leq \Omega_M) = \frac{(M_M - M_m)(\Omega_M - \Omega_m)}{4\pi^2} \quad (26)$$

10.2 Détermination de la position de tous les satellites dans la constellation

Dans ce paragraphe, nous utilisons la même notation qu'au § 5. Soit $\mathbf{x} = (M, \Omega)^T$ le vecteur caractérisant la position du satellite de référence. Comme, dans ce cas, l'anomalie moyenne du satellite de référence est connue (et non la latitude comme auparavant), il n'existe qu'une seule configuration de constellation associée à la paire (M, Ω) . Pour déterminer la position de tous les autres satellites de la configuration de constellation, les quantités suivantes doivent être calculées pour: $i = 0, \dots, N_{Satparplan} - 1$ et $j = 0, \dots, N_{Plans} - 1$:

$$M_i^j = M + i\beta + j\lambda \quad (27)$$

$$E_i^j = M_i^j + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin(nM_i^j) \quad (28)$$

$$v_i^j = 2 \arctg \left(k \operatorname{tg} \frac{E_i^j}{2} \right) \quad (29)$$

$$r_i^j = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos(v_i^j)} \quad (30)$$

$$\gamma_i^j = (v_i^j + \omega)_{MOD 2\pi} \quad (31)$$

$$\theta_i^j = \arcsin(\sin \delta \sin(\gamma_i^j)) = f_1(\gamma_i^j) \quad (32)$$

$$\varphi_{s_i}^j = \arccos \left[\frac{\cos(\gamma_i^j)}{\cos(f_1(\gamma_i^j))} \right] \text{sgn}(\gamma_i^j) \quad (33)$$

$$\varphi_i^j = (\varphi_{s_i}^j + \Omega_g + j\Psi)_{MOD 2\pi} \quad (34)$$

Dans l'expression ci-dessus, Ω_g désigne la longitude du noeud ascendant correspondant au plan orbital du satellite de référence, qui peut être formulée en termes de longitude Ω du noeud ascendant lorsque le satellite de référence se trouve au périégée et d'anomalie moyenne du satellite de référence M , sous la forme:

$$\Omega_g = (\Omega - M\Delta\Omega_{AN} / 2\pi)_{MOD 2\pi} \quad (35)$$

où $\Delta\Omega_{AN}$ désigne l'espacement longitudinal entre passages ascendants successifs par le plan équatorial. Notez que, comme prévu, lorsque le satellite de référence se trouve au périégée, $M = 0$ et, en conséquence $\Omega_g = \Omega$.

Enfin, le vecteur définissant la position du $i^{\text{ème}}$ satellite dans le $j^{\text{ème}}$ plan est donné par:

$$\mathbf{p}_i^j = \begin{pmatrix} r_i^j \cos(\theta_i^j) \cos(\varphi_i^j) \\ r_i^j \cos(\theta_i^j) \sin(\varphi_i^j) \\ r_i^j \sin(\theta_i^j) \end{pmatrix} \quad (36)$$

10.3 Choix des incréments de l'anomalie moyenne

La valeur de l'incrément de l'anomalie moyenne ΔM dépend de la valeur des incréments de l'anomalie vraie Δv , qui sont choisis en fonction des mêmes critères que ceux présentés au § 6 pour le choix des incréments de longitude et de latitude. Si on considère la relation non linéaire entre l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie, on peut aisément démontrer que, si l'on souhaite une quantification uniforme de l'anomalie moyenne, l'incrément de l'anomalie moyenne doit satisfaire la formule d'inégalité:

$$\frac{\Delta M}{\Delta v} \leq \min_v \frac{dM}{dv} = \frac{1-e}{k} \quad (37)$$

dans laquelle Δv représente l'incrément (maximal) requis de l'anomalie vraie.

NOTE 1 – Dans le cas de satellites à poursuite non répétitive, pour lesquels Ω est considéré comme étant une variable aléatoire continue, répartie de manière uniforme sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et indépendante de M , les incréments $\Delta\Omega$ doivent être choisis conformément aux mêmes critères que ceux présentés au § 6 pour le choix des incréments de longitude et de latitude.

10.4 Commentaires

On peut faire les observations suivantes concernant la procédure décrite au § 10:

- La procédure peut également être appliquée à des satellites à poursuite non répétitive, dans ce cas Ω est modélisé sous la forme d'une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$.
- Si on travaille sur le plan $M-\Omega$, il est possible de tirer profit d'une certaine symétrie qui peut exister dans la constellation de satellites et réduire, en conséquence, le temps de traitement. Dans ce cas, il peut être avantageux de travailler sur le plan $M-\Omega_g$ de préférence au plan $M-\Omega$. Notez que, dans le cas de satellites à poursuite répétitive, M et Ω_g ne sont pas des variables aléatoires statistiquement indépendantes. En fait, à partir des équations (23) et (35) nous obtenons:

$$p_{\Omega_g | M=\eta}(G) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta \left(G - (\Omega_k - \frac{\eta \Delta \Omega_{AN}}{2\pi})_{MOD 2\pi} \right)$$

et, considérant par ailleurs l'équation (21), nous avons:

$$p_{M\Omega_g}(\eta, G) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \delta \left(G - (\Omega_k - \frac{\eta \Delta \Omega_{AN}}{2\pi})_{MOD 2\pi} \right) \quad \begin{array}{l} \text{pour } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{array}$$

Dans le cas de satellites à poursuite non répétitive, si on considère la formule (35) et le fait que Ω est uniformément réparti sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et statistiquement indépendant de M , on peut démontrer que Ω_g est également uniformément réparti sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et statistiquement indépendant de M . Dans ce cas,

$$p_{M\Omega_g}(\eta, G) = \frac{1}{4\pi^2} \quad \begin{array}{l} \text{pour } -\pi < \eta \leq \pi \\ -\pi < G \leq \pi \end{array}$$

- Travailler dans le plan $M-\Omega$ ou dans les plans $M-\Omega_g$ nécessite un plus grand nombre de cellules que travailler dans le plan $\varphi-\theta$. En fait, les cellules du plan $\varphi-\theta$ sont visitées plusieurs fois (au moins deux fois). Les cellules du plan $\varphi-\theta$ dont la latitude est proche de la valeur maximale δ notamment sont visitées un grand nombre de fois.
- Les concepts de **PPII** et de **RPII** décrits aux § 3, 6 et 7 (visant à une utilisation conjointe de grilles de quantification fines et larges) peuvent également être mis en œuvre. Dans ce cas, les points **PPII** doivent être déterminés dans le plan $\varphi-\theta$ puis transférés vers le plan $M-\Omega$, dans lequel les points **RPII** sont définis.

APPENDICE 1

À L'ANNEXE 1

Fonction de densité de probabilité de la position d'un satellite non OSG

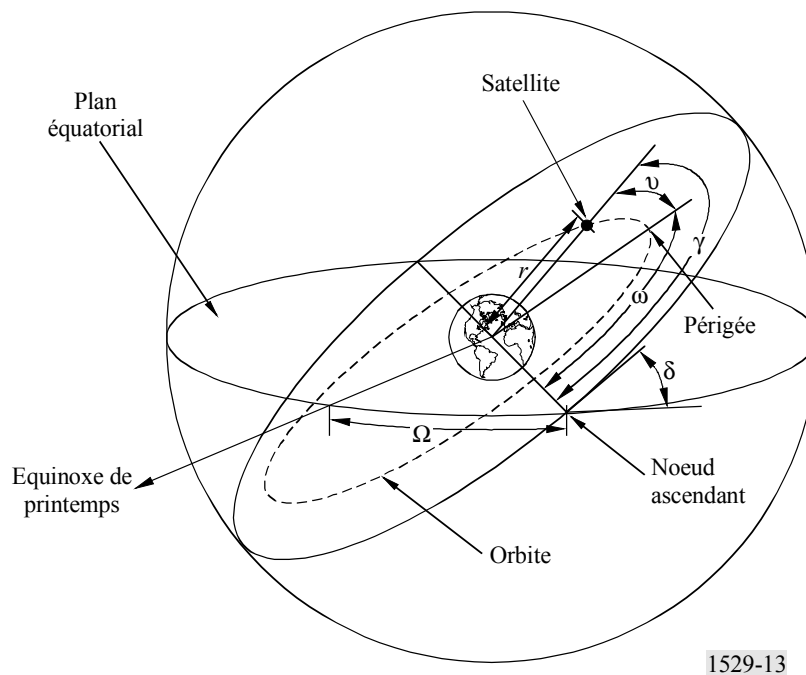
Pour obtenir une expression analytique de la fonction de densité de probabilité $p_x(\Phi, \Theta)$ de la position \mathbf{x} d'un satellite non OSG, considérons d'abord l'orientation d'une orbite elliptique de la Terre, telle qu'illustrée à la Fig. 13. Sur cette Figure, l'inclinaison δ désigne l'angle entre le plan de l'orbite et le plan équatorial. L'ascension droite du noeud ascendant (RAAN, *right ascension of the*

ascending node) Ω est mesurée vers l'est à partir de l'équinoxe de printemps, définissant ainsi l'orientation du plan orbital. L'argument du périégée ω définit l'orientation de l'orbite elliptique dans le plan orbital. L'angle γ représente le déplacement angulaire du satellite mesuré à partir de la ligne de noeuds (intersection entre le plan équatorial et le plan orbital) et est donné par:

$$\gamma = (\omega + \nu)_{MOD\ 2\pi} \tag{38}$$

où ν désigne l'anomalie dite vraie associée à la position du satellite. Dans ce système de référence, étant donnés δ et la RAAN Ω , la position du satellite est caractérisée par sa distance r jusqu'au centre de la Terre et son déplacement angulaire γ . Pour l'ensemble du présent Appendice, $(x)_{MOD\ 2\pi}$ prend des valeurs dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$.

FIGURE 13
Orientation d'une orbite terrestre elliptique



1529-13

Comme indiqué ci-après dans ce paragraphe, la fonction de densité de probabilité $p_x(\Phi, \Theta)$ souhaitée peut être obtenue à partir de la fonction de densité de probabilité $p_\gamma(\Gamma)$ de γ . Pour obtenir $p_\gamma(\Gamma)$, nous notons d'abord que le déplacement angulaire γ , donné par la formule (38) peut être exprimé en fonction de l'angle E dit d'anomalie excentrique sous la forme:

$$\gamma = \left(\omega + 2 \arctg \left[k \operatorname{tg} \left(\frac{E}{2} \right) \right] \right)_{MOD\ 2\pi} \tag{39}$$

où:

$$k = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{40}$$

et e désigne l'excentricité de l'orbite. Il est également établi que l'anomalie excentrique E du satellite satisfait à l'équation de Kepler:

$$M_0 + \frac{2\pi}{T}(t-t_e) = E - e \sin(E) \tag{41}$$

La partie gauche de l'équation (41) correspond à l'anomalie moyenne M du satellite, où M_0 désigne sa valeur à un instant de référence t_e et T désigne la période de révolution du satellite. L'anomalie excentrique E est une fonction périodique dont la période est T . L'approche consiste ici à modéliser E sous la forme d'une variable aléatoire et de mesurer la probabilité $P(E \in \Delta)$ pour la fraction de la période T pendant laquelle $E(t)$ prend des valeurs dans l'intervalle Δ . Ceci revient à considérer, dans l'équation (41), que t est une variable aléatoire uniformément répartie dans l'intervalle $(0, T)$. Cette hypothèse établit une correspondance entre le pourcentage de temps et la probabilité, garantissant ainsi que les résultats obtenus au moyen de la méthode analytique correspondent à ceux qui seraient obtenus au moyen de méthodes de simulation temporelle sur un temps de simulation infini. A partir de ces hypothèses et de la relation indiquée dans l'équation (41), il est possible de déterminer la fonction de densité de probabilité de E qui, pour E étant défini modulo 2π , est donnée par:

$$p_E(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1 - e \cos(\varepsilon)}{2\pi} & \text{pour } -\pi < \varepsilon \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (42)$$

De la même manière, au moyen de la formule (42) et de la relation indiquée dans l'équation (39), on a obtenu la fonction de densité de probabilité de γ , qui est donnée par:

$$p_\gamma(\Gamma) = \begin{cases} \frac{k(1+e)}{2\pi} \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Gamma - \omega}{2}\right)}{k^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Gamma - \omega}{2}\right)} \right]^2 & \text{pour } -\pi < \Gamma \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (43)$$

Pour déterminer $p_x(\Phi, \Theta)$, il est nécessaire de considérer la position du satellite dans un système de référence géostationnaire, comme l'illustre la Fig. 14. Sur cette figure, le satellite se situe à la position P, sa latitude θ et sa longitude φ étant données par:

$$\varphi = (\varphi_s + \Omega_g) \operatorname{MOD} 2\pi \quad (44)$$

φ_s étant la variation de longitude due au déplacement angulaire γ et Ω_g étant la longitude de la ligne de noeuds, qui change en fonction du mouvement de rotation de la Terre et de la rotation de la ligne des noeuds du noeud ascendant. La longitude de la ligne des noeuds Ω_g peut être écrite sous la forme suivante:

$$\Omega_g = (\Omega_0 + (\Omega_e + \Omega_r)t) \operatorname{MOD} 2\pi \quad (45)$$

où Ω_0 est la longitude de la ligne des noeuds à l'instant initial et Ω_e et Ω_r sont, respectivement, la vitesse angulaire de la Terre et la rotation angulaire du noeud ascendant. Si l'on considère que les deux vitesses angulaires Ω_e et Ω_r sont constantes, la longitude Ω_g peut être adéquatement modélisée sous la forme d'une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$.

Pour exprimer φ_s et θ sous la forme de fonctions de γ , il convient de considérer la configuration illustrée à la Fig. 14. A partir de cette Figure, il est aisé de conclure que:

$$\overline{OP} \sin(\theta) = \overline{OP} \sin(\gamma) \sin(\delta) \quad (46)$$

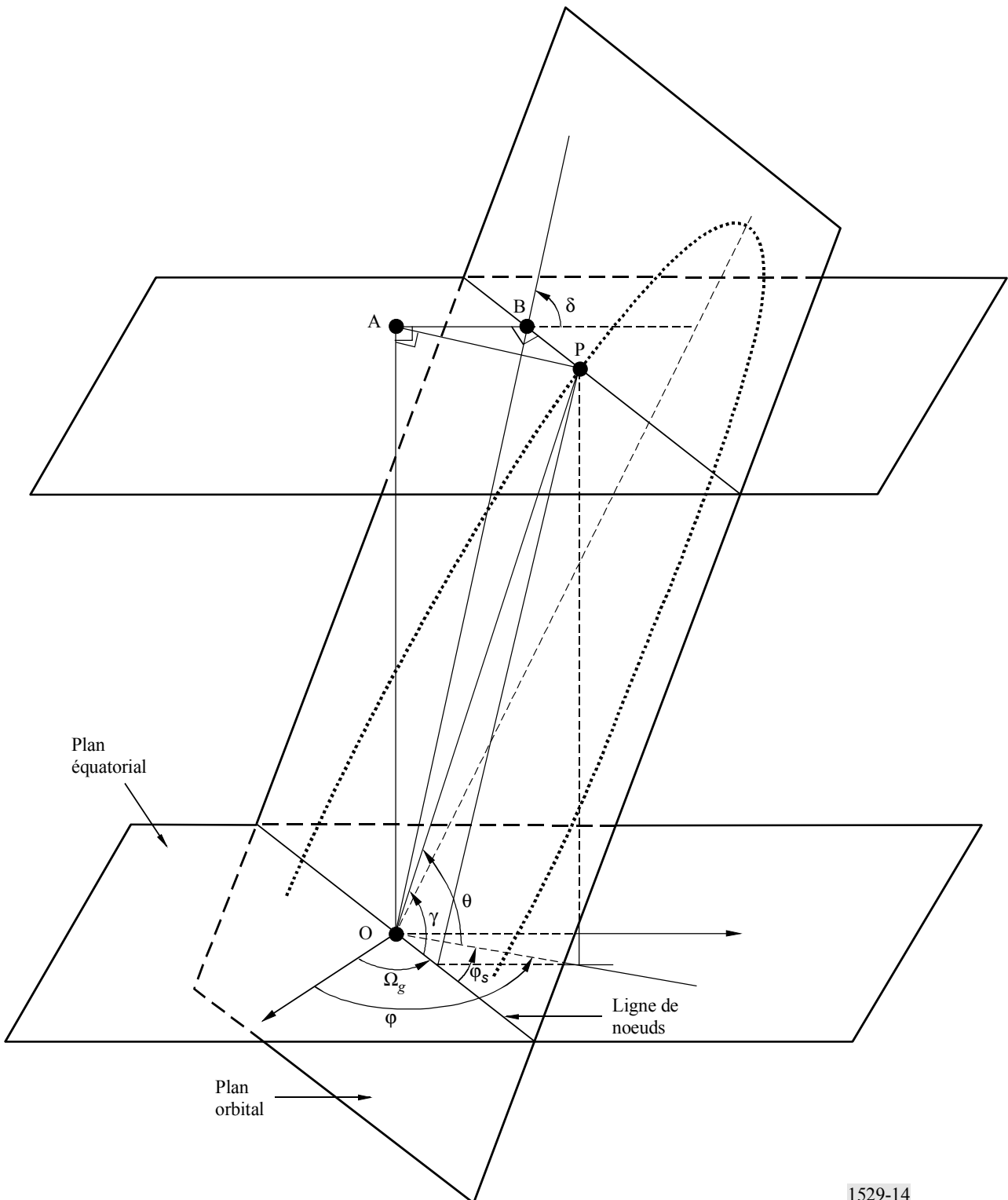
$$\overline{OP} \cos(\gamma) = \overline{OP} \cos(\theta) \cos(\varphi_s) \quad (47)$$

ou que

$$\sin(\theta) = \sin(\gamma) \sin(\delta) \tag{48}$$

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cos(\varphi_s) \tag{49}$$

FIGURE 14
Configuration du problème



A partir de l'équation (48), nous obtenons:

$$\theta = \arcsin(\sin \delta \sin \gamma) = f_1(\gamma) \quad (50)$$

et de l'équation (49), en prenant en considération l'équation (50),

$$\varphi_s = \arccos\left[\frac{\cos \gamma}{\cos(f_1(\gamma))}\right] \text{sgn}(\gamma) = f_2(\gamma) \quad (51)$$

où $\text{sgn}(\)$ représente la fonction signe, qui a été incluse pour étendre la validité de l'égalité à la plage $\gamma \in (-\pi, \pi)$.

De plus, si l'on considère les équations (44) et (51), on obtient:

$$\varphi = (\varphi_s + \Omega_g) \text{MOD } 2\pi = (f_2(\gamma) + \Omega_g) \text{MOD } 2\pi \quad (52)$$

En supposant que la longitude Ω_g de la ligne de noeuds et le déplacement angulaire γ sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes, et comme Ω_g est uniformément répartie sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$, on peut démontrer que la variable aléatoire φ est également uniformément répartie sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ pour toute valeur donnée de γ , c'est-à-dire:

$$p_{\varphi|\gamma=\Gamma}(\Phi) = p_{\varphi}(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{pour } -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (53)$$

Notez maintenant que φ , qui est statistiquement indépendant de γ , est également statistiquement indépendant de $\theta = f_1(\gamma)$. En conséquence, la fonction de densité de probabilité de la position \mathbf{x} du satellite non OSG peut s'écrire sous la forme:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = p_{\varphi}(\Phi) p_{\theta}(\Theta) \quad (54)$$

La fonction de densité de probabilité $p_{\theta}(\Theta)$ de la latitude Θ , peut être obtenue au moyen de la formule (50) et considérant que $p_{\gamma}(\Gamma)$ est donné par l'équation (43). Il en résulte:

$$p_{\theta}(\Theta) = p_{\theta|AM}(\Theta)P(AM) + p_{\theta|DM}(\Theta)P(DM) \quad (55)$$

où $p_{\theta|AM}(\Theta)$ et $p_{\theta|DM}(\Theta)$ représentent les fonctions de densité de probabilité de la latitude du satellite sachant que le satellite est respectivement en mode ascendant et en mode descendant. Ces fonctions de densité de probabilité conditionnelles sont données par:

$$p_{\theta|AM}(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(AM)} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (56)$$

et

$$p_{\theta|DM}(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(DM)} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (57)$$

avec $P(AM)$ et $P(DM)$ désignant respectivement la probabilité que le satellite soit en mode ascendant ou descendant, ces deux valeurs étant données par:

$$P(AM) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 d\Theta \quad (58)$$

et

$$P(DM) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{k(1+e)}{2\pi} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 d\Theta \quad (59)$$

Si les intégrales des équations (58) et (59) sont résolues, nous obtenons:

$$P(AM) = h(\omega) - h(-\omega) \quad (60)$$

$$P(DM) = h(\pi - \omega) - h(-\pi + \omega) \quad (61)$$

où:

$$h(\omega) = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{\alpha(\omega)}{k}\right) - \frac{ke}{\pi} \left(\frac{\alpha(\omega)}{\alpha^2(\omega) + k^2} \right) + \frac{1 + \operatorname{sgn}(\omega - \pi/2)}{2} \quad (62)$$

avec:

$$\alpha(\omega) = \frac{1 - \sin \omega}{\cos \omega} \quad (63)$$

Dans les équations (57) à (59),

$$g(\Theta) = \cos \omega \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta} + \sin \omega \sin \Theta \quad (64)$$

et k est donné par l'équation (40).

Enfin, à partir des formules (54), (53) et (55) à (59), nous obtenons:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)P(AM) + p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)P(DM) \quad (65)$$

où $p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta)$ et $p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta)$ sont les fonctions de densité de probabilité de la position du satellite (longitude et latitude), le satellite étant respectivement en mode ascendant et mode descendant. Ces fonctions de densité de probabilité conditionnelles sont données par:

$$p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(AM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right]^2 & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (66)$$

et

$$p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{P(DM)} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\frac{2 \sin \delta}{(1+k^2) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right]^2 & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ & -\pi < \Phi \leq \pi \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (67)$$

L'équation (65) peut également être écrite sous la forme:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{k(1+e)}{4\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} \left[\left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta - (1-k^2)g(\Theta)} \right)^2 + \left(\frac{2 \sin \delta}{(1+k) \sin \delta + (1-k^2)g(-\Theta)} \right)^2 \right] & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & -\pi < \Phi \leq \pi \\ & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (68)$$

Dans le cas particulier des orbites circulaires ($e=0 \rightarrow k=1$), les équations (66) et (67) sont ramenées à:

$$p_{\mathbf{x}|AM}(\Phi, \Theta) = p_{\mathbf{x}|DM}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos \Theta}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} & \text{pour } -\delta < \Theta \leq \delta \\ 0 & -\pi < \Phi \leq \pi \\ & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (69)$$

Notez que, pour obtenir l'équation (69), on a considéré que:

$$P(AM) = P(DM) = \frac{1}{2}$$

En conséquence:

$$p_{\mathbf{x}}(\Phi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{\cos(\Theta)}{\sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \Theta}} & \text{pour } -\delta < \Theta < \delta \\ 0 & -\pi < \Phi \leq \pi \\ & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (70)$$

Les équations (68) et (70) peuvent, par exemple, être utilisées pour déterminer la probabilité de trouver un satellite dans toute région donnée du ciel.

Elles produisent également des fonctions de densité de probabilité telles que celles données en exemple à la Fig. 2.