

国 际 电 信 联 盟

**ITU-R**

国际电联无线电通信部门

**ITU-R TF.538-4 建议书**  
(07/2017)

**频率和时间(相位)中随机  
出现的不稳定性测量**

**TF 系列**  
**时间信号和频率标准发射**



国际电信联盟

## 前言

无线电通信部门的职责是确保卫星业务等所有无线电通信业务合理、平等、有效、经济地使用无线电频谱，不受频率范围限制地开展研究并在此基础上通过建议书。

无线电通信部门的规则和政策职能由世界或区域无线电通信大会以及无线电通信全会在研究组的支持下履行。

## 知识产权政策 (IPR)

ITU-R的IPR政策述于ITU-R第1号决议的附件1中所参引的《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策》。专利持有人用于提交专利声明和许可声明的表格可从<http://www.itu.int/ITU-R/go/patents/en>获得，在此处也可获取《ITU-T/ITU-R/ISO/IEC的通用专利政策实施指南》和ITU-R专利信息数据库。

### ITU-R 系列建议书

(也可在线查询 <http://www.itu.int/publ/R-REC/en>)

系列	标题
<b>BO</b>	卫星传送
<b>BR</b>	用于制作、存档和播出的录制；电视电影
<b>BS</b>	广播业务（声音）
<b>BT</b>	广播业务（电视）
<b>F</b>	固定业务
<b>M</b>	移动、无线电定位、业余和相关卫星业务
<b>P</b>	无线电波传播
<b>RA</b>	射电天文
<b>RS</b>	遥感系统
<b>S</b>	卫星固定业务
<b>SA</b>	空间应用和气象
<b>SF</b>	卫星固定业务和固定业务系统间的频率共用和协调
<b>SM</b>	频谱管理
<b>SNG</b>	卫星新闻采集
<b>TF</b>	<b>时间信号和频率标准发射</b>
<b>V</b>	词汇和相关问题

**说明：** 该ITU-R建议书的英文版本根据ITU-R第1号决议详述的程序予以批准。

电子出版  
2018年，日内瓦

© 国际电联 2018

版权所有。未经国际电联书面许可，不得以任何手段复制本出版物的任何部分。

## ITU-R TF.538-4 建议书

## 频率和时间（相位）中随机出现的不稳定性测量

(1978-1990-1992-1994-2017年)

## 范围

频率和相位的不稳定性可能以随机过程为特征，该等过程可用傅里叶频域或时域统计表示。针对该等频率和相位不稳定性的特征，本建议书呈现了多种方法和技术。

## 关键词

随机出现的不稳定性、阿伦方差、时间计量、统计度量、相位、频率

国际电信联盟无线电通信大会，

考虑到

- a) 须具备充足的语言能力以对标准频率和时间资源以及测量系统的不稳定性特征进行交流；
- b) 经典方差无法对某些随机时间和频率的不稳定性进行汇总；
- c) 重点实验室、天文台、实业公司和一般用户已接受技术委员会关于电气和电子工程师协会（IEEE）仪表与测量学会的频率和时间的一些建议，并通过了现有的IEEE关于“用以基本频率和时间测量的物理量 — 随机不稳定性的IEEE标准定义”的第1139-2008号标准；
- d) 频率和时间不稳定性测量应基于全面的理论原则，方便使用且可直接说明；
- e) 可通过使用简单的仪器，测量频率和时间不稳定性，其结果令人满意。

建议

**1** 标准频率和时间信号的随机出现的不稳定性应以频域中的统计度量 $S_y(f)$ 、 $S_\phi(f)$ 或 $S_x(f)$ ，以及时域中的 $\sigma_y(\tau)$ 、Mod.  $\sigma_y(\tau)$ 、 $\sigma_x(\tau)$ 、 $\sigma_y(t,\tau)$ 和TheoBR为特征，含义如下：

**1.1** 对频域中归一化频率不稳定性 $y(t)$ 的衡量标准是 $S_y(f)$ ，即归一化频率不稳定性 $y(t) = (\nu(t) - \nu_0)/\nu_0$ 单面频谱密度（ $0 < f < \infty$ ），在 $y(t) = (\nu(t) - \nu_0)/\nu_0$ 中， $\nu(t)$ 是瞬时载波频率， $\nu_0$ 是标称频率；

**1.2** 对频域中相位不稳定性 $\phi(t)$ 的衡量标准是 $S_\phi(f)$ ，即傅里叶频率 $f$ 中相位不稳定性 $\phi(t)$ 的单面频谱密度（ $0 < f < \infty$ ）；

**1.3** 对频域中用时间单位（相位时间） $x(t)$ 来表示相位不稳定性的衡量标准是 $x(t)$ ，即相位时间不稳定性 $x(t) = \phi(t)/2\pi\nu_0$ 的单面频谱密度（ $0 < f < \infty$ ）；依据 $y(t) = dx(t)/dt$ ， $x(t)$ 与 $y(t)$ 有关；

**1.4** 以上频谱密度的关系如下：

$$S_y(f) = \frac{f^2}{v_0^2} S_\phi(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f) \quad (1)$$

$S_y(f)$ 、 $S_\phi(f)$  和  $S_x(f)$  的尺度分别为  $\text{Hz}^{-1}$ 、 $\text{Rad}^2 \text{Hz}^{-1}$  和  $\text{s}^2 \text{Hz}^{-1}$ ;

**1.5** 对时域中归一化频率不稳定性  $y(t)$  的衡量标准是双样本标准偏差  $\sigma_y(\tau)$ ，以及附件1中所定义的改进型双样本标准偏差  $\text{Mod. } \sigma_y(\tau)$  和  $\text{TheoBR}$  方差;

**1.6** 附件1中定义了对时域中时间不稳定性的衡量标准  $\sigma_x(\tau)$ ;

**1.7** 对时域中归一化频率不稳定性  $y(t)$  的变化的衡量标准是附件1所定义的双样本标准偏差  $\sigma_y(t, \tau)$ ;

**2** 当说明频率和时间不稳定性的统计度量时，对非随机现象应予以认可，例如：

**2.1** 应说明统计度量的任何观测时间相依性;

**2.2** 应详细说明检测系统行为的方法（例如从最小二乘法回归系数到  $M$  频率测量获得的线性频率偏移的估算，每项测量均有规定的平均或采样周期  $\tau$  和带宽  $f_h$ ）;

**2.3** 应说明环境敏感度（例如频率的相关性和 / 或相位对温度、磁场、气压等）;

**3** 当说明一定程度上频率和时间不稳定性时，也应具体说明所有相关的测量参数：

**3.1** 测量方法;

**3.2** 参考信号的特性;

**3.3** 标称信号频率  $v_0$ ;

**3.4** 测量系统的带宽  $f_h$  和通信低通滤波器响应;

**3.5** 总测量时间或测量次数  $M$ ;

**3.6** 计算技术（例如在估算时域数据的功率频谱密度时的滞后窗细节，或在估算双样本标准偏差  $\sigma_y(\tau)$  时的死区效应的假设）;

**3.7** 估算的置信度;

**4** 应提供频率和时间不稳定性测量的图解说明或解析表达式，并应适时包含置信区间（即  $S_y(f)$ 、 $S_\phi(f)$  和  $S_x(f)$  随  $f$  而变化； $\sigma_y(\tau)$ 、 $\text{Mod. } \sigma_y(\tau)$  和  $\sigma_x(\tau)$  随  $\tau$  而变化；和 / 或  $\sigma_y(t, \tau)$  随  $t$  和  $\tau$  而变化）。

## 附件1

## 频率和相位噪声的特征

## 1 术语定义

频率和相位的不稳定性可能以随机过程为特征，该等过程可用傅里叶频域或时域统计表示。从标称频率 $\nu_0$ 到瞬时的归一化频率偏差 $y(t)$ 与关于标称相位 $2\pi\nu_0 t$ 的瞬时相位涨落 $\varphi(t)$ 有关，公式如下：

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad (2)$$

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_0}$$

其中 $x(t)$ 为相转变，用时间单位表示。

## 2 傅里叶频域

在傅里叶频域中，可通过几个单面（傅里叶频率范围：0至 $\infty$ ）频谱密度对频率不稳定性进行定义，例如：

与 $y(t)$ 有关的 $S_y(f)$ 、与 $\varphi(t)$ 有关的 $S_{\dot{\varphi}}(f)$ 、与 $\varphi(t)$ 有关的 $S_{\varphi}(f)$ 、与 $x(t)$ 有关的 $S_x(f)$ 等。

通过以下方程式，将该等频谱密度联系起来：

$$S_y(f) = \frac{f^2}{\nu_0^2} S_{\dot{\varphi}}(f) \quad (3)$$

$$S_{\dot{\varphi}}(f) = (2\pi f)^2 S_{\varphi}(f) \quad (4)$$

$$S_x(f) = \frac{1}{(2\pi\nu_0)^2} S_{\varphi}(f) \quad (5)$$

幂次定律频谱密度经常被用作精密振荡器中随机涨落的合理模型。在实际情况中，一般认为，对许多振荡器而言，该等随机涨落是五个独立的噪声进程的总和，以下方程式，局限很少且具有代表性：

$$S_y(f) = \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_{\alpha} f^{\alpha} & \text{for } 0 < f < f_h \\ 0 & \text{for } f > f_h \end{cases} \quad (6)$$

其中 $h_{\alpha}$ 是常数， $\alpha$ 是整数， $f_h$ 是低通滤波器的高频截止。对包括相位噪声的平稳噪声而言，方程式(3)、(4)和(5)准确且相容。方程式(6)中对 $f$ 的限制条件消除了高频发散。五个噪声进程的辨识和特征已在表1中给出，并如图1所示。实际上通常只需两个或三个噪声进程便足以描述精密振荡器的随机频率涨落；其他条件可忽略不计。

### 3 时域

可通过几个样本方差来定义时域中的随机频率不稳定性。样本方差的平方根被称作偏差，且统计数值通常得以报道。

#### A 阿伦方差 $\sigma_y(\tau)$

随机频率不稳定性的衡量标准是双样本标准偏差，双样本标准偏差是双样本无死区方差 $\sigma_y^2(\tau)$ 的平方根，定义如下：

$$\sigma_y^2(\tau) = 1/2 \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \quad (7)$$

其中：

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} \quad \text{以及 } t_{k+1} = t_k + \tau \quad (\text{相邻样本})$$

$\langle \rangle$ 表示无限时间平均值。通常将方程式(7)中所述的度量称作阿伦方差 (AVAR)。  $x_k$ 和  $x_{k+1}$ 是在  $t_k$ 和  $t_{k+1} = t_k + \tau$ ,  $k = 1, 2, \dots$ 上做出的时间残差测量，且  $1/\tau$  是固定采样率，给出频率测量之间的无死区时间。通过“残差”了解已知的系统效应已消除。

假如初步取样率确定为  $1/\tau_0$ ，则一般来说，通过运用被称作“重叠估算”的方法便可更高效地估算  $\sigma_y(\tau)$ 。通过计算方程式(8)可得出该估算值。

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2n)\tau^2} \sum_{i=1}^{N-2n} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i)^2 \quad (8)$$

其中  $N$ 是由  $\tau_0$ 和  $\tau=n\tau_0$ 隔开的原始时间偏离测量的放号 ( $N=M+1$ ，其中  $M$ 是采样时间原始频率测量的放号， $\tau_0$ )。

假如死区时间存在于频率偏离测量之间，且在计算方程式(7)中被忽略，有证据表明由于频率测量被重新部署以估算  $n\tau_0$  ( $n > 1$ )的稳定性，产生的稳定值 (不再是阿伦方差) 将会有偏差 (白频率噪声除外)。通过对偏差进行研究，已公布有关方差修正的表格。

假如无死区时间，则可将原始  $\bar{y}_i$ 合并，创造出一组  $\bar{y}_k$ ：

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} \bar{y}_i$$

表1

振荡器频率不稳定性的五个独立噪声进程的功能特性

噪声进程说明	重对数坐标图的边坡特征				
	频域		时域		
	$S_y(f)$	$S_\phi(f)$ 或 $S_x(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$	Mod. $\sigma_y^2(\tau)$	$\sigma_x^2(\tau)$
	$\alpha$	$\beta \equiv \alpha - 2$	$\mu$	$\mu'$	$\eta$
随机游动频率	-2	-4	1	1	3
闪烁频率	-1	-3	0	0	2
白频率	0	-2	-1	-1	1
闪烁相位	1	-1	-2	-2	0
白相位	2	0	-2	-3	-1

$$S_y(f) = h_a f^\alpha \quad \alpha = -\mu - 1, -2 \leq \mu < 2$$

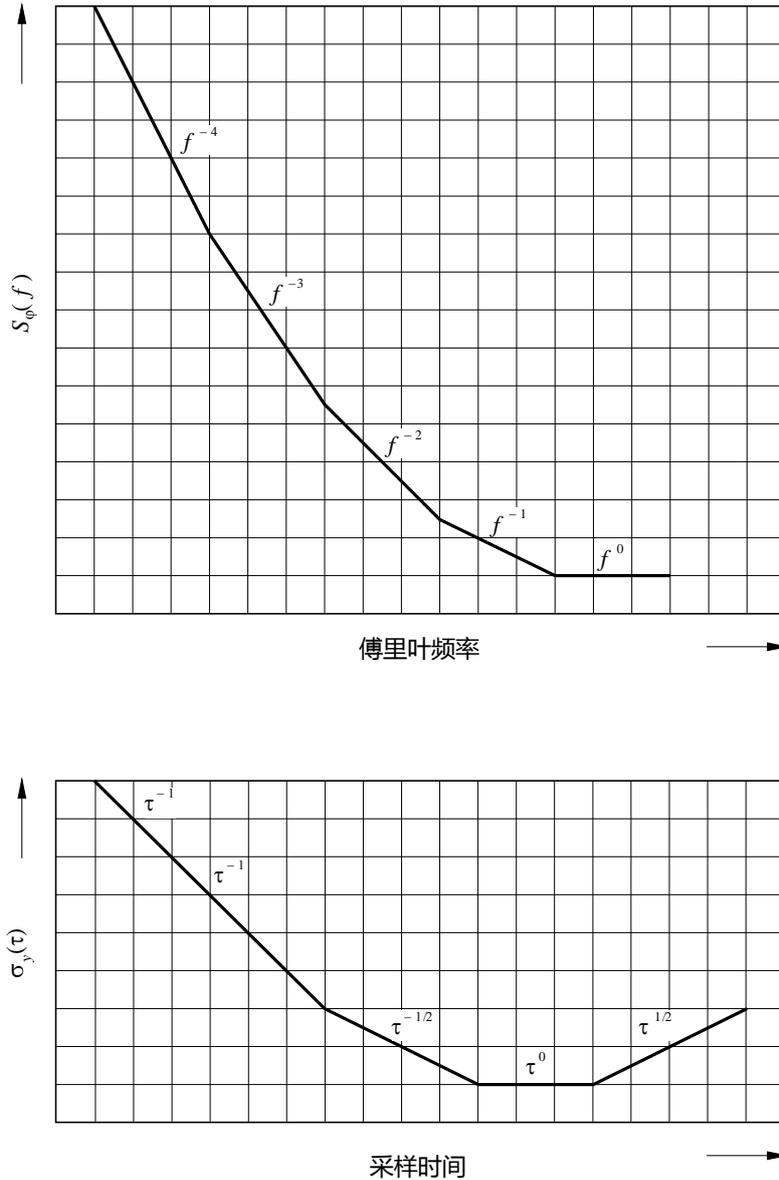
$$S_\phi(f) = v_0^2 h_a f^{\alpha-2} = v_0^2 h_a f^\beta \quad \beta \equiv \alpha - 2; \eta \equiv \mu' + 2$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4\pi^2} h_a f^{\alpha-2} = \frac{1}{4\pi^2} h_a f^\beta \quad \alpha = -\mu' - 1$$

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) \sim |\tau|^{\mu'}$$

$$\sigma_x^2(\tau) \sim |\tau|^\eta$$

图1  
五个独立噪声进程的边坡特征（重对数图尺）



TF0538-01

随后得到 $\sigma_y(\tau)$ 的“重叠估算”：

$$\sigma_y(\tau) = \left| \frac{1}{2(M - 2n + 1)} \sum_{k=1}^{M - 2n + 1} (\bar{y}_{k+n} - \bar{y}_k)^2 \right|^{1/2} \quad (9)$$

因此，可根据单个数据集的 $\tau$ 以一种简便方式确定 $\sigma_y(\tau)$ 的相依性。

对于一个频率标准， $\sigma_y(\tau)$ 对 $\tau$ 的图表通常表现出包含图1所示的要素的现象。在第一部分中， $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1/2}$ （白频噪声）和/或 $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$ （白色或闪烁相位噪声）反映标准的基本噪声性能。在 $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$ 的情况下，确定振荡器是否被白色相位噪声或闪烁相位噪声扰乱的做法不切实际。

替代技术建议如下。当人们希望研究振荡器中现存噪声源的性质时，这便是对 $\sigma_y(\tau)$ 有效性的一个限制。通常情况下，对于大于1 Hz的傅里叶频率而言，频域分析已经足够。随着平均时间的增加，该 $\tau^{-1}$ 和/或 $\tau^{-1/2}$ 定律会得以延续，直至达到所谓的闪烁“基底”，其中 $\sigma_y(\tau)$ 不受平均时间 $\tau$ 支配。在几乎所有频率标准中均可发现该行为；其取决于特定频率标准，且在其物理基础上并未完全得以理解。造成闪烁“基底”可能的原因实例有电源电压波动、磁场波动、度衡量标准组件的变化和微波功率变化。最后随着平均时间的增加，曲线表明了稳定性的劣化。通常该现象产生的时间范围是几个小时至几天，这取决于特殊的度衡量标准。

## B 改进型阿伦偏差Mod. $\sigma_y(\tau)$

“改进型阿伦偏差（MVAR）”、Mod.  $\sigma_y^2(\tau)$ 已形成，其具有对白色相位噪声和闪烁相位噪声产生有关 $\tau$ 的不同相依性的性质。对“改进型阿伦偏差（MVAR）”、Mod.  $\sigma_y^2(\tau)$ 的相依性分别是 $\tau^{-3/2}$ 和 $\tau^{-1}$ 。可通过以下方程式的平方根，消除Mod.  $\sigma_y(\tau)$ ：

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \tau^2 n^2 (N - 3n + 1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left[ \sum_{i=j}^{n+j-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right]^2 \quad (10)$$

其中：

$N$ ：由 $\tau_0$ 隔开的时间变化性测量的原始符号

$\tau = n\tau_0$  样本时间的选择。

技术文献中讨论了估算的特性和置信度。已开发出适用于白频率噪声和随机游动频率噪声的具体模型的最大似然估计法 $\sigma_y(\tau)$ 。已证明这两个模型对抽样时间（抽样时间比铯束标准的长几秒钟）有用。

## C 时间偏差 $\sigma_x(\tau)$

如图1所示的五个独立的噪声进程的时域中时间不稳定性可通过用相邻时间平均值的二阶差分测量计算得出。该测量与Mod.  $\sigma_y^2(\tau)$ 有关。

$$\sigma_x^2(\tau) = (\tau^2 \text{Mod. } \sigma_y^2(\tau)) / 3 \quad (11)$$

$$\sigma_x^2(\tau) = (1/6) \langle [\bar{x}_{k+2n} - 2\bar{x}_{k+n} + \bar{x}_k]^2 \rangle \quad (12)$$

其中 $(dx/dt) = y$ 且 $\tau = n\tau_0$ 。因此， $\sigma_x(\tau)$ 是时间偏差（TDEV）。括号“ $\langle \rangle$ ”表示无限时间平均值， $x$ 上方的横线“-”表示区间 $\tau$ 的平均值。用于上述二阶差分方程的三个平均值是相邻的。因此，对于上述二阶差分中 $k$ 的给定值，这些平均值占用了 $3\tau$ 的空格。

频频谱密度和时间方差的关系如下：

$$S_x(f) \sim f^\beta$$

$$\sigma_x^2(\tau) \sim \tau^\eta \quad (13)$$

$$\beta = -\eta - 1$$

测量噪声的常用类型围绕在 $\eta=0$ 上，TVAR产生对 $\tau$ 近零的依赖（精确测量的理想特质）。该种测量的其他有用特性是：

- 对于 $\tau=\tau_0$ ，白色相位调制（WPM）等于时差测量的经典标准偏差；
- 对于 $\tau=N\tau_0$ （数据长度），WPM等于时差测量平均值的标准偏差；
- 在时间和频率度量衡学中常见的随机过程是良性且集中的；
- $\tau$ 的依赖性表明了幂次定律的频谱密度模型切合数据；
- 在 $\tau$ 的某一特值下， $\sigma_x(\tau)$ 的振幅与五个幂律的频谱密度模型（ $\beta=-4, -3, -2, -1, 0$ ）的其中一个假定值一起，为任何一个标准频谱密度测量值提供了足够的信息以估算频域中对应的数量。

从比对测量值中对个体时钟的稳定性进行评估所遇到的问题早有研究，并提出用一种通用的、一致的模型来处理信号差测量值，缺少任何一个关于时钟间缺乏关联的先验假设均不成立。

#### D 动态阿伦方差 $\sigma_y(t, \tau)$

动态阿伦方差（DADEV）是时域中随机频率不稳定性变化的测量，动态阿伦方差（DADEV）的平方根的含义为：

$$\sigma_y^2(t, \tau) = \frac{1}{2(T_w - 2\tau)} \int_{t - \frac{T_w + \tau}{2}}^{t + \frac{T_w - \tau}{2}} \mathcal{E} \left[ (\bar{y}(t' + \tau) - \bar{y}(t'))^2 \right] dt' \quad (14)$$

其中， $\mathcal{E}$ 表示以对无数的实验实现的总体平均值的形式获得的期望值， $T_w$ 是分析窗口的长度。对DAVAR的估算值可通过以下方程式得到：

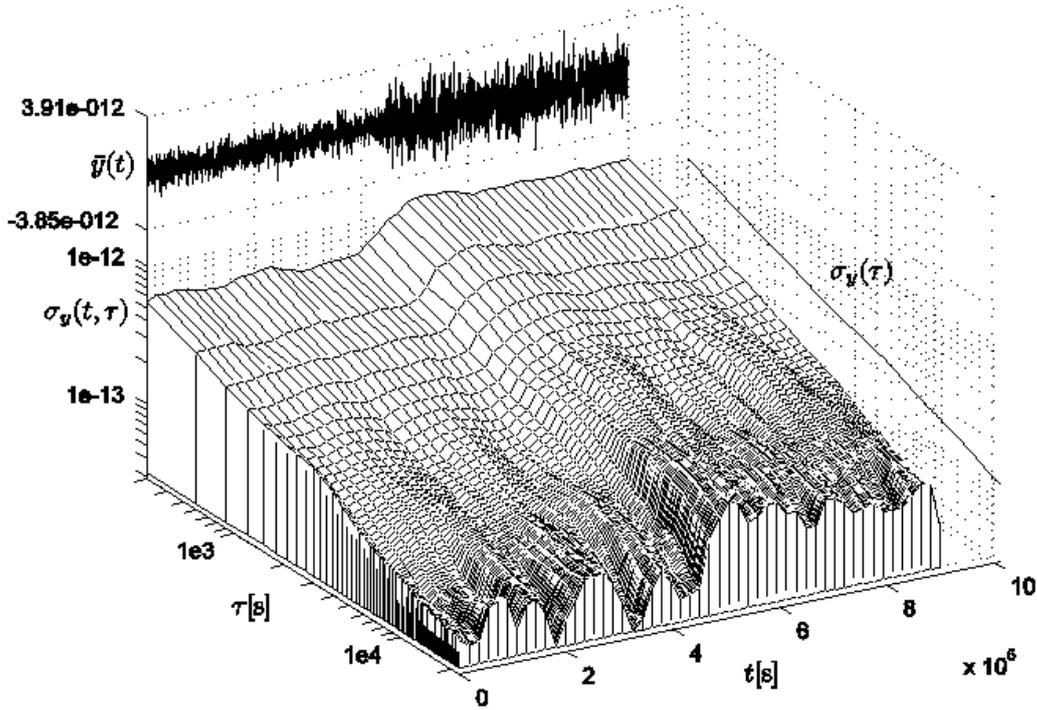
$$\sigma_y^2(n, k) = \frac{1}{2k^2\tau_0^2(N_w - 2k)} \sum_{m=n - \frac{N_w}{2}}^{m=n + \frac{N_w}{2} - 2k - 1} (x_{m+2k} - 2x_{m+k} + x_m)^2 \quad (15)$$

其中， $t = n\tau_0$ ， $\tau = k\tau_0$ ， $T_w = N_w\tau_0$ ，且假设 $N_w$ 为偶数。

实验证据表明，由于几种因素（如温度、湿度、振动、引力效应和辐射）作用，时钟和振荡器（其标准测度是阿伦方差）的不稳定性可随时间而发生改变。动态阿伦方差（DAVAR）随时钟不稳定性的时间推移而测量出该种变化。

图2显示白频噪声（白频噪声的方差突然增加）的平均频率偏差 $\bar{y}(t)$ 。DAVAR（DAVAR的平方根 $\sigma_y(t, \tau)$ 网格划分中有所显示）揭示了噪声中方差的变化，而阿伦方差（其平方根如侧面图所示）使方差的变化最终达到平衡。

图2  
方差变化动态阿伦方差DAVAR (网格划分)



## E 长期估计量TheoBR

阿伦方差 (AVAR) 的长期估计量是理论方差#1, 称为Theo1, 若去掉偏差, 则称为TheoBR方差。TheoBR方差即去掉与样本AVAR有关的轻微偏差的Theo1。Theo1算出已知数据趋势 $N_x$ 中每个可允许的时间误差 $x_i$ 的二阶差分平方的平均数, 且汇报的频率稳定性时间比阿伦方差中最长的稳定性时间 $\tau$ 还要长50%。因此, Theo1和TheoBR代表了一种新型的描述性统计, 实质上这比样本AVAR的重叠版本具有更高的等效自由度。

*Theo1* 定义

$$Theo1(m, \tau_0, N_x) := \frac{1}{0.75(N_x - m)(m\tau_0)^2} \times \sum_{i=1}^{N_x - m} \sum_{\delta=0}^{\frac{m}{2} - 1} \frac{1}{\left(\frac{m}{2} - \delta\right)} \left[ \left( x_i - x_{i - \delta + \frac{m}{2}} \right) + \left( x_{i+m} - x_{i + \delta + \frac{m}{2}} \right) \right]^2 \quad (16)$$

当 $m$ 为偶数时,  $10 \leq m \leq N_x, \tau = 0.75m\tau_0$

Theo1偏差, 亦称Theo1-dev, 相对于白调频噪声的阿伦偏差是无偏压的。但对于其他噪声类型而言, Theo1-dev有轻微偏压。该种偏压可用算法 (该算法是在Theo1和阿伦方差的重叠 $\tau$ 区域中计算出二者之间的平均偏压) 自动消除, 再用平均偏压来校正Theo1。因此:

$$TheoBR = \frac{\mathcal{E}[*AVAR]}{\mathcal{E}[*Theo1]} \times Theo1 \quad (17)$$

其中, \*AVAR和\*Theo1可由一系列 $m\tau_0$ 计算得出, 在 $m\tau_0$ 中, 样本AVAR和Theo1重叠在一起并被选作用于代表AVAR的较大 $\tau$ 的偏压而不是较小 $\tau$ 的偏压。偏压校正是一个常数, 且不取决于 $\tau$ 。

*TheoBR*定义

$$TheoBR(m, \tau_0, N_x) := \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{AVAR(m=9+3i, \tau_0, N_x)}{Theo1(m=12+4i, \tau_0, N_x)} \right] \times Theo1(m, \tau_0, N_x) \quad (18)$$

其中  $n = \left\lfloor \frac{0.5N_x}{3} - 3 \right\rfloor$

*TheoH*定义

混合理论方差，亦称*TheoH*方差，是一个混合数据（由此可知“H”的意义），该混合数据把短期AVAR和*TheoBR*方差的重叠版本的数值相结合，以估算出长期频率稳定度是否达到数据运行长度 $N_x$ 的 $\frac{3}{4}$ ，所述的频率稳定性要比AVAR中可用的数据长度长50%。

$$TheoH(m, \tau_0, N_x) := \begin{cases} AVAR(m, \tau_0, N_x), & 1 \leq m \leq \frac{k}{\tau_0} \\ TheoBR(m, \tau_0, N_x), & \frac{k}{0.75\tau_0} \leq m \leq N_x - 1, \text{even} \end{cases} \quad (19)$$

其中， $k$ 是 $\tau \leq 0.2T$ ，且 $AVAR(m, \tau_0, N_x)$ 具有足够的置信度。

AVAR中常见较高的 $\tau$ 限值是数据运行时间 $T$ 的20%。从计算方面讲，由于*TheoBR*比AVAR更集中，所以在以上定义中只包含了 $m$ 较大的数值，而非 $m$ 的所有数值。一般来说，无须把 $m$ 的所有数值都计算出来； $m$ 的倍频程或十区段均足以描绘出随机噪声的特征。为根据*TheoBR*数值描绘出AVAR的外形，需有意在 $\frac{0.2T}{\tau_0} < m < \frac{0.8T}{3\tau_0}$ 中插入一个小间隙，若想计算出更多或所有的 $m$ 数值，可填满该间隙。

*TheoH*方差的平方根是*TheoH*偏差，亦称*TheoH*-dev。

#### 4 频域和时域之间的转换

一般而言，若已知归一化频率波动的频谱密度 $S_y(f)$ ，则双样本方差可计算如下：

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (20)$$

$$\text{Mod. } \sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{f_h} S_y(f) \frac{\sin^6(\pi f \tau)}{(n\pi f \tau)^2 \sin^2(\pi f \tau_0)} df \quad (21)$$

和：

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{8}{3} \int_0^{f_h} S_x(f) \frac{\sin^6(\pi f \tau)}{n^2 \sin^2(\pi f \tau_0)} df \quad (22)$$

具体情况下，就方程式(6)呈现的指数模型而言，时域测量也遵循由方程式(6)和(11)导出的幂次定律。

$$\sigma_y^2(\tau) = h_{-2} \frac{(2\pi)^2}{6} \tau + h_{-1} 2 \log_e 2 + h_0 \frac{1}{2\tau} + h_1 \frac{1.038 + 3 \log_e (2\pi f_h \tau)}{(2\pi)^2 \tau^2} + h_2 \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2} \quad (23)$$

$h_{\alpha}$ 的数值是振荡器频率噪声的特征。对于整数值（通常情况下如此）可进行注释

$$\begin{aligned} \mu &= -\alpha - 1 && \text{当 } -3 \leq \alpha \leq 1 \\ \mu &\sim -2 && \text{当 } \alpha \geq 1 \end{aligned}$$

其中：

$$\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^\mu$$

该等转换已通过实验和计算得以证实。表2呈现从时域到频域和从频域到时域的频率不稳定性测量值间调换的系数。

表2  
从频域频谱密度到时域方差与从时域方差到频域频谱密度的  
频率不稳定性测量值的调换 ( $2\pi f_h \tau \gg 1$ )

噪声进程的说明	$\sigma_y^2(\tau) =$	$S_y(f) =$	$S_\phi(f) =$	$S_x(f) =$
随机游动频率	$A[f^2 S_y(f)] \tau^{-1}$	$\frac{1}{A} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{v_0^2}{A} [\tau^{-1} \sigma_y^2(\tau)] f^{-4}$	$\frac{3.636}{A} [\tau^{-3} \sigma_x^2(\tau)] f^{-4}$
闪烁频率	$B[f S_y(f)] \tau^0$	$\frac{1}{B} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$\frac{v_0^2}{B} [\tau^0 \sigma_y^2(\tau)] f^{-3}$	$\frac{0.741}{AB} [\tau^{-2} \sigma_x^2(\tau)] f^{-3}$
白频率	$C[f^0 S_y(f)] \tau^{-1}$	$\frac{1}{C} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{v_0^2}{C} [\tau^1 \sigma_y^2(\tau)] f^{-2}$	$\frac{1}{AC} [\tau^{-1} \sigma_x^2(\tau)] f^{-2}$
闪烁相位	$D[f^{-1} S_y(f)] \tau^{-2}$	$\frac{1}{D} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^1$	$\frac{v_0^2}{D} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^{-1}$	$0.89 [\tau^0 \sigma_x^2(\tau)] f^{-1}$
白色相位	$E[f^{-2} S_y(f)] \tau^{-2}$	$\frac{1}{E} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^2$	$\frac{v_0^2}{E} [\tau^2 \sigma_y^2(\tau)] f^0$	$\frac{1}{\tau_0 f_h} [\tau \sigma_x^2(\tau)] f^0$

$$A = \frac{4\pi^2}{6}$$

$$D = \frac{1.038 + 3 \log_e (2\pi f_h \tau)}{4\pi^2}$$

$$B = 2 \log_e 2$$

$$E = \frac{3f_h}{4\pi^2}$$

$$C = 1/2$$

图1中已标绘出频域和时域中的五个独立噪声进程的边坡特征（重对数图尺）。

### 5 时域测量的置信界限

为估算从有限数量样品中获得的高斯噪声类型的特值 $\sigma_y(\tau)$ 的置信区间或均值相关区间图，可使用下列表达式（非重叠估算值）：

$$\text{置信区间 interval } I_{\alpha} \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_{\alpha} \cdot M^{-1/2} \quad \text{for } M > 10 \quad (24)$$

其中:

$M$ : 估算中用到的数据点的总数

$\alpha$ : 如上一节中所定义的

$\kappa_2 = \kappa_1 = 0.99$

$\kappa_0 = 0.87$

$\kappa_{-1} = 0.77$

$\kappa_{-2} = 0.75$ .

$M = 100$ ,  $\alpha = -1$  (闪烁频率噪声) 和  $\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = 10^{-12}$  作为高斯模型的一个示例, 可写作:

$$I_\alpha \simeq \sigma_y(\tau) \cdot \kappa_\alpha \cdot M^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0.77) \cdot (100)^{-1/2} = \sigma_y(\tau) \cdot (0.077) \quad (25)$$

上式给出:

$$\sigma_y(\tau = 1 \text{ s}) = (1 \pm 0.08) \times 10^{-12} \quad (26)$$

已研发出包含几对测量值之间死区时间的改进版评估程序, 并显示频率波动的自相关影响。

以上置信区间适用于“非重叠估算值”。在“重叠估算值”的情况下, 置信区间更小且可计算出来。

由双样本方差在通过将几个连续的测量值和死区时间联系在一起所得到的时间间隔中的应用造成的偏压已被确定为一种噪声函数。这种偏压可能非常重要。

已确定模拟滤波器 (该模拟滤波器限定了其标称频率的上述信号的噪声功率) 性质的影响, 尤其是使用低通滤波器来代替集中于标称频率的带通滤波器。

已计算出重叠估算值的自由度 (d.f.)。从理论上来说, d.f. 已被导出并绘制出估算双样本标准偏差的置信区间的幂律谱。双样本标准偏差  $\sigma_y(\tau)$  的置信区间是:

$$\frac{\sqrt{(d.f.) \hat{\sigma}_y^2(\tau)}}{\chi_{P_1}} < \sigma_y(\tau) < \frac{\sqrt{(d.f.) \hat{\sigma}_y^2(\tau)}}{\chi_{P_2}} \quad (27)$$

其中:

$\chi_{P_1}$  和  $\chi_{P_2}$ : 卡方分布的百分位值;

帽子 “^”: 估算或有限集合的双样本测量方差。

若  $\alpha = +2$ , 对于自由度的改进程度几乎为非重叠估算值情况的  $n$  倍。在  $\alpha = +1$  情况下, 也出现重大改进。对于  $\alpha = 0$ , 自由度比为 2; 对于  $\alpha = -1$ , 自由度比为 1.3; 对于  $\alpha = -2$ , 自由度比为 1.04。

## 6 潜在误导性的统计度量的应用程序

此处详述的几项统计度量，均为达到具体目的而设立，可能无法用于其他项目。

阿伦偏差、改进版阿伦偏差和时间偏差均以 $x(t)$ 的二阶差分为基础，因此对一阶多项式并不敏感。但消除二阶或高阶多项式却能够减少 $\tau$  ( $\tau > 0.2T$ )较大的值。

因此，假如必须要在计算统计数据之前消除这样一个多项式，强烈建议使用对消除曲线不敏感的统计度量，例如建立在 $x(t)$ 的高阶差分基础上的统计度量。使用二阶或高阶差分的统计度量的阶级对数据中的线性变分并不敏感。

频域测量和时域测量均可能在不规则间隔的数据面前给出错误结果。通常数据间隔导致信息丢失。处理这些数据的有些方法是用内插法，其他方法是假设丢失数据为零，而所有方法均可造成扭曲效果。对于软件处理不规则间隔数据的方式应予以理解。

## 7 结论

用以描述频率和相位不稳定性以及相应的幂律频谱密度模型的统计方法，通常足够用以描述振荡器不稳定性度。当前版本采用了附加的处理时域中时间变化不稳定性方法，并将时域不稳定性计算的适用范围扩及至一大部分数据长度。

非随机（确定性的或系统性的）变化并不涵盖于上述方法中。这些变化可能是周期性或单调性变化。可用已知的谐波分析方法分析周期性变化，用线性或高阶的偏移术语描述单调性变化。

---