Teoría para Grupo de Disponibilidad Total,

Sistema de Espera

(Incluye ejercicios)

De TETRAPRO, editado por el Sr. H. Leijon, UIT

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

Teoría Básica de Teletráfico (T)
TEORIA PARA GRUPO DE DISPONIBILIDAD TOTAL, SISTEMA DE ESPERA (TFD)

Contenido

1. <u>Supuestos</u>

Un sistema de espera se caracteriza por el hecho de que llamadas bloqueadas pueden esperar y ser servidas más tarde, cuando haya un dispositivo libre.

Para el supuesto (TGD 2.9) esto significa que

$$W(p) = 1 \text{ para todos } p \qquad \text{(TFD 1.1)}$$

Esto nos dice también que un sistema de espera debe ser capaz de aceptar tantas llamadas en cola como posiblemente puedan originarse. Un sistema que sólo sea capaz de aceptar un número limitado de llamadas en espera funciona, encima de dicho límite, como un sistema de pérdida y debe considerarse como un sistema combinado de espera y de pérdida.

Aquí solamente trataremos con sistemas de espera genuinos donde $W(p) = 1$ para todo p.

Uno puede asumir que todas las llamadas en cola esperen a ser servidas o que todas ellas puedan desistir. A continuación se tratan ambos supuestos. El primero conduce a expresiones matemáticas más simples; el segundo, a mayor realismo.

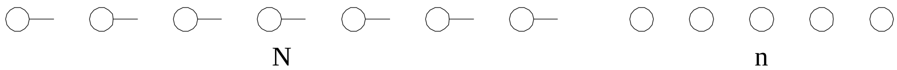
Para el tratamiento completo de un sistema de espera, es necesario definir la disciplina de la disposición en cola, es decir, la manera en que la siguiente llamada a ser servida se selecciona de la cola. Uno puede distinguir esencialmente entre tres métodos de manejo de colas:

1. cola ordenada (primera en llegar, primera en ser servida);
2. cola aleatoria (cada llamada en la fila tiene la misma probabilidad de ser la próxima en ser servida;
3. cola con prioridades (todas las llamadas en espera tienen diferentes prioridades, la de más alta prioridad se sirve primero).

También hay combinaciones de estas disciplinas de disposición en cola, así como casos en los cuales se usa disposición en cola de dos pasos (las llamadas se llevan desde un espacio exterior a otro interior, desde donde se sirven todas las llamadas que allí se encuentran antes de admitir nuevas llamadas).

La disciplina de la disposición en cola influye en la distribución del tiempo de espera, pero generalmente no en el tiempo medio de espera.

Considere un grupo de disponibilidad total *(N,n)*



El estado del sistema se define como *(p)*, donde

$$0 \leq p \leq N \qquad \text{(TFD 1.2)}$$

Para $p > n$ el estado *(p)* implica que n dispositivos están ocupados y que p-n llamadas están esperando.

Es evidente que para que exista espera, N debe ser $> n$. Esto excluye el supuesto para que la distribución de Bernoulli sea considerada en un sistema de espera. Para el caso $N = \infty$, $n = \infty$, no se considera que pueda surgir un espera. Por tanto, aquí no son válidos los supuestos para la distribución de Poisson.

Así, los sistemas de espera se limitan a casos en los que

$$N > n \qquad \text{(TFD 1.3)}$$

donde N puede ser finito o infinito, mientras que n debe ser siempre finito.

Para las intensidades de terminación se asume que

$$\left.\begin{aligned} \mu_p &= \frac{p}{s} && \text{para } 0 \le p \le N \\ \mu_p &= \frac{n}{s} + \frac{\Theta}{s}\cdot(p-n) && \text{para } \quad p > n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.4)}$$

$\Theta > 0$ significa que una llamada en espera desiste con la intensidad Θ/s.
$\Theta = 0$ implica que todas las llamadas esperan hasta ser servidas. El supuesto
$\Theta > 0$ implica que una llamada en espera continúa esperando por un tiempo descrito por la distribución exponencial

$$f(t) = \frac{\Theta}{s}\cdot e^{-\frac{\Theta}{s}\cdot t} \qquad \text{(TFD 1.5)}$$

con el valor medio $\frac{s}{\Theta}$

La expresión (TFD1.4) da la siguiente solución general:

$$\left.\begin{aligned} [p] &= \frac{s^p\cdot\prod_{\nu=0}^{p-1} y(\nu)}{p!}\cdot[0] && \text{para } 0 \le p \le N \\ [p] &= \frac{s^p}{\Theta^{p-n}}\cdot\frac{\prod_{\nu=0}^{p-1} y(\nu)}{n!\prod_{\nu=n+1}^{p}\left(n\cdot\frac{1-\Theta}{\Theta}+\nu\right)}\cdot[0] && \text{para } \; n < p \le N \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.4a)}$$

donde N puede ser finito o infinito.

Para las intensidades de incremento se asume que

$$\lambda = y(p)\cdot W(p) \qquad \text{(TFD 2.9)}$$

donde $W(p) = 1$ para todo p. $\quad 0 \le p \le N$

y

$$\left.\begin{aligned} y(p) &= (N-p)\cdot\beta && \text{tipo } \mathbf{EB} \\ y(p) &= y && \text{tipo } \mathbf{E} \\ y(p) &= a\cdot(\gamma+p) && \text{tipo } \mathbf{TNB} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.6)}$$

La inserción de (TFD 1.4) y (TGD 2.9) en (TGD 1.11) da

$$\left.\begin{aligned} p\cdot[p] &= s\cdot y(p-1)\cdot[p-1] && \text{para } 0 \le \text{p} \le \text{n} \\ (n+\Theta\cdot(p-n))\cdot[p] &= s\cdot y(p-1)\cdot[p-1] && \text{para n} < \text{p} \le \text{N} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.7)}$$

De (TFD 1.7) se obtiene entonces la solución para los diferentes supuestos de y (p), como se da en (TFD 1.6), por medio de repeticiones (recursions) y utilizando

$$\sum_{p=0}^{N} [p] = 1$$

Se entiende que Θ incrementado significa que la espera será menor antes que las llamadas desistan. Si $\Theta = 1$, ninguna llamada esperará y el sistema se convertirá en un sistema de pérdida.

2. Algunas características de los sistemas de espera

Además de las cantidades definidas para los sistemas de pérdida, también deben especificarse los tiempos de espera para sistemas de espera.

Congestión De tiempo:

La congestión de tiempo se define aquí como la probabilidad de que todos los dispositivos estén ocupados. Consecuentemente,

$$E = \sum_{p=n}^{N} [\,p\,] \qquad \text{(TFD 2.1)}$$

Congestión de llamadas:

Se define como la probabilidad de que una llamada tenga que esperar, lo que es igual a la proporción de llamadas que deben esperar. Consecuentemente,

$$B = P(>0) = \frac{\sum_{p=n}^{N} y(p)\cdot[\,p\,]}{\sum_{p=0}^{N} y(p)\cdot[\,p\,]} \qquad \text{(TFD 2.2)}$$

Probabilidad de que se abandone la espera

La proporción esperada de llamadas que abandonan la espera se calcula así

$$B_{gu} = \frac{\sum_{p=n+1}^{N} [\,p\,]\cdot\frac{\Theta}{s}\cdot(n-p)}{\sum_{p=0}^{N} y(p)\cdot[\,p\,]} \qquad \text{(TFD 2.2a)}$$

donde N puede ser finito o infinito.

Tráfico cursado y tráfico ofrecido:

El tráfico cursado por los n dispositivos es

$$A' = \sum_{p=0}^{n-1} p[\,p\,] + \sum_{p=n}^{N} n\cdot[\,p\,] \qquad \text{(TFD 2.3)}$$

El tráfico ofrecido es

$$A = \sum_{p=0}^{N} s\cdot y(p)\cdot[\,p\,] \qquad \text{(TFD 2.4)}$$

La relación entre A y A' se obtiene de

$$\left.\begin{array}{ll} s\cdot y(p)\cdot[p] = (p+1)\cdot[p+1] & \text{para } 0 \le p < n \\ s\cdot y(p)\cdot[p] = (n+\Theta\cdot(p-n+1))\cdot[p+1] & \text{para } n \le p < N \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 1.7)}$$

observando que y(N) = 0. Donde no hay fuentes libres, no pueden ofrecerse más llamadas.

$$\sum_{p=0}^{N} s\cdot y(p)\cdot[\,p\,] = \sum_{p=1}^{n} p\cdot[\,p\,] + \sum_{p=n+1}^{N} \big(n+\Theta\cdot(p-n)\big)\cdot[\,p\,]$$

Consecuentemente,

$$A = A' + \Theta \cdot Q \qquad \text{(TFD 2.5)}$$

donde

$$Q = \sum_{p=n+1}^{N} (p-n) \cdot [p] \qquad \text{(TFD 2.6)}$$

Q es el número medio de llamadas esperando en el sistema, lo que es igual a la <u>longitud media de la cola</u>, calculada durante todo el período (incluyendo ocasiones en las que no hay llamadas en espera).

Es evidente que

$$\boxed{\begin{array}{l} A = A' \text{ para } \Theta = 0 \\ A > A' \text{ para } \Theta > 0 \end{array}} \qquad \text{(TFD 2.7)}$$

<u>El factor de mejora</u>

El factor de mejora se define como la cantidad adicional de tráfico que puede ser cursado si el número de dispositivos se incrementa de *n* a *n+Δn.*

$$F = A'(n+\Delta n) - A'(n) \qquad \text{(TFD 3.10)}$$

<u>Probabilidad de que x dispositivos específicos estén ocupados</u>

Para un sistema de espera, de acuerdo a (TGD 3.11), esta probabilidad es

$$H_x = \sum_{p=x}^{n-1} [p] \cdot \frac{\binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p}} + \sum_{p=n}^{N} [p] \qquad \text{(TFD 3.11)}$$

<u>Tiempos de espera</u>

La distribución de tiempos de espera dependen de la disciplina de la disposición en cola. Si la función de frecuencia de los tiempos de espera se simboliza por *f (t),* el tiempo medio de espera para las llamadas en espera es

$$u = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t) dt \qquad \text{(TFD 2.8)}$$

mientras el tiempo medio de espera para todas las llamadas es

$$U = P(>0) \cdot \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t) dt \qquad \text{(TFD 2.9)}$$

P (>0) = la probabilidad de que una llamada deba esperar, es decir

$$U = P(>0) \cdot u \qquad \text{(TFD 2.9a)}$$

$$U < u \qquad \text{(TFD 2.10)}$$

<u>Distribuciones de tiempos de espera</u>

Desde el punto de vista del servicio, es generalmente más importante la probabilidad de largos (problemáticos) tiempos de espera. La probabilidad de que una llamada en espera tenga que aguardar más de un tiempo t_0 es:

$$P_V(>t_0) = P_V(t>t_0) = \int_{x=t_0}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{(TFD 2.11)}$$

La probabilidad de que una llamada arbitraria tenga que esperar un tiempo mayor que t_0 es:

$$P\ (>t_0) = P\ (>0) \cdot P_V(>t_0) \qquad \text{(TFD 2.12)}$$

$$P\ (>t_0) = P\ (>0) \cdot \int_{x=t_0}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{(TFD 2.12a)}$$

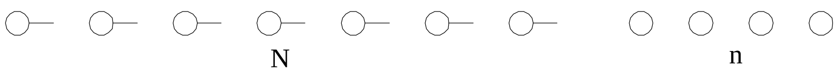
La distribución del tiempo de espera depende de la disciplina de la disposición en cola, mientras que el tiempo medio de espera es casi siempre independiente de la disciplina de la disposición en cola. (TFD 2.13)

Debido a que la espera puede ocurrir solamente cuando el número de fuentes es mayor que el número de dispositivos *($N > n$)*, sólo hay tres distribuciones a ser consideradas; que son aquéllas de los tipos EB, E y TNB. Para cada una des estas distribuciones hay dos casos posibles: las llamadas abandonan la espera o no lo hacen *($\Theta > 0$ o $\Theta = 0$)*. El supuesto $\Theta > 0$ incrementa el realismo de los modelos, pero también aumenta la complejidad de las fórmulas.

Ya que la distribución de tipo TNB no se ha usado aún en teoría, sólo quedan las distribuciones EB y E las cuales se describirán con más detalle.

Para los sistemas de pérdida (TFL) investigamos un parámetro de tráfico a la vez, para todos los diferentes casos básicos (EB, E etc.). Aquí encontramos adecuado hacer lo contrario, es decir, investigar un caso básico a la vez, para todos los diferentes parámetros de tráfico.

3. <u>Número limitado de fuentes: sistema de espera del tipo Engset</u>



El supuesto (TFD 1.3) + (TFD 1.4) + (TFD 1.6EB) da

$$\left.\begin{array}{ll}
0 \le p \le N & \\
N > n & \\
\mu_p = \dfrac{p}{s} & \text{para } 0 \le p \le n \\
\mu_p = \dfrac{n}{s} + \dfrac{\Theta}{s}\cdot(p-n) & \text{para } n < p \le N \\
\lambda_p = y(p)\cdot W(p) & \\
y(p) = (N-p)\cdot\beta & \\
W(p) = 1 & \text{para } 0 \le p \le N
\end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 3.1)}$$

$\Theta = 0$: todas las llamadas aguardan hasta ser atendidas

$\Theta > 0$: las llamadas en espera desisten de la espera con la intensidad $\dfrac{\Theta}{s}$

A partir de

$$\lambda_{p-1} \cdot [\,p-1\,] = \mu_p \cdot [\,p\,] \qquad \text{(TGD 1.11)}$$

Obtenemos, para el supuesto (TFD 1.4) + (TFD 1.6EB):

$$[p] = \binom{N}{p} \cdot a^p \cdot [0] \qquad 0 \leq p \leq n$$

$$[p] = \frac{p!}{n! \cdot \pi} \cdot \binom{N}{p} \cdot a^p \cdot [0] \qquad n \leq p \leq N$$

$$\pi = \prod_{v=1}^{p-n} (n + v \cdot \Theta) \qquad \text{(TFD 3.2)}$$

$$\sum_{p=0}^{N} [p] = 1$$

DISTRIBUCION DE
SISTEMA DE RETARDO
DEL TIPO ENGSET

$$\alpha = \beta \cdot s \qquad (N > n)$$

$$(\Theta \geq 0)$$

Para $\Theta = 0$ (TFD 3.2) se reduce a

$$[\,p\,] = \binom{N}{p} \cdot \alpha^p \cdot [\,0\,] \qquad 0 \leq p \leq n$$

$$[\,p\,] = \frac{p!}{n! \cdot n^{p-n}} \cdot \binom{N}{p} \cdot \alpha^p \cdot [\,0\,] \qquad n < p \leq N$$

$$\sum_{p=0}^{N} [\,p\,] = 1 \qquad \text{(TFD 3.3)}$$

$$\alpha = \beta \cdot s$$

$$\Theta = 0$$

<u>Congestión de tiempo</u>

Para (TFD 3.2) y (TFD 3.3) obtenemos

$$E = \sum_{p=n}^{N} [\,p\,] \qquad \text{(TFD 3.4)}$$

<u>Congestión de llamadas</u>

Para (TFD 3.2) y (TFD 3.3) la congestión de llamadas es igual a la probabilidad que una llamada tiene de esperar:

$$B = (\,P > 0\,) = \frac{\sum_{p=n}^{N} (\,N-p\,) \cdot \beta \cdot [\,p\,]}{\sum_{p=0}^{N} (\,N-p\,) \cdot \beta \cdot [\,p\,]}$$

$$B = \frac{\sum_{p=n}^{N} (N-p) \cdot [p]}{\sum_{p=0}^{N} (N-p) \cdot [p]} \qquad \text{(TFD 3.5)}$$

la cual quede escribirse

$$B = \frac{(N-n) \cdot \Theta \cdot E + n \cdot (E - [n])}{\frac{\Theta + \beta}{1+\beta} \cdot N \cdot (1-E) + (N-n) \cdot \Theta \cdot E + n \cdot (E - [n])} \qquad \text{(TFD 3.5a)}$$

Para $\Theta = 0$, B se reduce a

$$B = \frac{n \cdot (E - [n])}{\frac{N \cdot \alpha \cdot (1-E)}{1+\alpha} + n \cdot (E - [n])} \qquad \text{(TFD 3.6)}$$

Para $\Theta = 1$

$$B = \frac{N \cdot E + n \cdot [n]}{N - n \cdot [n]} = \frac{E - \frac{n}{N} \cdot [n]}{1 - \frac{n}{N} \cdot [n]} \qquad \text{(TFD 3.7)}$$

Nótese que el caso $\Theta = 1$ da

$$\left.\begin{aligned} [p] &= \binom{N}{p} \cdot b^p \cdot (1-b)^{N-p} \\ b &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ \Theta &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 3.8)}$$

Si $p = n$, obtenemos

$$[n] = \binom{N}{n} \cdot b^n \cdot (1-b)^{N-n}$$

(TFD 3.8) es idéntico a la distribución de Bernoulli (TFL 2.IB) para un sistema de pérdida. El estado *[p]*, sin embargo, aquí significa n ocupaciones y $p - n$ llamadas en espera para $p > n$.

La proporción esperada de llamadas que abandonan la espera se calcula como:

$$B_{gu} = \frac{\sum_{p=n+1}^{N} [p] \cdot \frac{\Theta}{s} \cdot (p-n)}{\sum_{p=0}^{N} [p] \cdot (N-p) \cdot \beta} = \frac{\Theta}{\alpha} \cdot \frac{\sum_{p=n+1}^{N} [p] \cdot (p-n)}{\sum_{p=0}^{N} [p] \cdot (N-p)} \qquad \text{(TFD 3.9)}$$

que puede ser escrita

$$B_{gu} = \frac{\Theta}{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \frac{(N\alpha - n \cdot (1+\alpha)) \cdot E + n \cdot [n]}{N \cdot (\Theta + \alpha) + (N\alpha - n \cdot (1+\alpha)) \cdot (\Theta - 1) \cdot E + (\Theta - 1) \cdot n \cdot [n]} \qquad \text{(TFD 3.9a)}$$

Para $\Theta = 0$, $B_{gu} = 0$, que debe ser correcto puesto que $\Theta = 0$ implica que no hay llamadas que desistan.

Para el caso en el que $\Theta = 1$:

$$B_{gu} = E \cdot \left(1 - \frac{n}{N} \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} \right) + \frac{n \cdot [n]}{N \cdot \alpha} \qquad \text{(TFD 3.9b)}$$

El efecto de Θ puede ilustrarse con el siguiente ejemplo numérico:

Considere un grupo con $N = 10$ fuentes, $n = 4$ dispositivos y $a = 0.5$. Para diferentes valores de 0 obtenemos los siguientes valores numéricos de las características:

Característica	$\Theta = 0$	$\Theta = 1$	$\Theta = 2$	$\Theta = \infty$
E	0.511	0.441	0.408	0.289
B	0.397	0.350	0.326	0.240
B_{gu}	0	0.094	0.131	0.240
Q	0.571	0.313	0.223	0
A'	3.143	3.020	2.962	2.755
A	3.143	3.333	3.408	3.623
$\frac{A - A'}{A}$	0	0.094	0.131	0.240
$\frac{B_{gu}}{B}$	0	0.269	0.400	1.000

4. <u>Número infinito de fuentes. Sistema de espera del tipo Erlang (Erlang II)</u>

N　　　　　　　　n

N = ∞　　　　　　　　n finito

$0 \le p \le \infty$

El supuesto (TFD 1.1) + (TFD 1.6E) da:

$$\left.\begin{array}{ll}
0 \le p \le \infty & \\
N = \infty & \\
n \text{ finite} & \\
\mu_p = \dfrac{p}{s} & 0 \le p \le n \\
\mu_p = \dfrac{n}{s} + \dfrac{\Theta}{s} \cdot (p - n) & n \le p \le \infty \\
\lambda_p = y(p) \cdot W(p) & \\
y(p) = y & \\
W(p) = 1 \quad \text{para todo p} &
\end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.1)}$$

$\Theta = 0$ significa que todas las llamadas esperan hasta ser atendidas

$\Theta > 0$ significa que las llamadas desisten con la intensidad $\dfrac{\Theta}{s}$

Usando $\mu_p \cdot [p] = \lambda_{p-1} \cdot [p-1]$ (TGD 1.11)

y aplicando el supuesto (TFD 4.1), obtenemos

$$
\begin{array}{ll}
[p] = \dfrac{A^p}{p!} \cdot [0] & 0 \le p \le n \\[2ex]
[p] = \dfrac{A^{p-n}}{\displaystyle\prod_{v=1}^{p-n} (n + v \cdot \Theta)} \cdot \dfrac{A^n}{n!} \cdot [0] & n < p \le \infty \\[2ex]
\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} [p] = 1 & \\[2ex]
A = y \cdot s \qquad\qquad \Theta \ge 0 &
\end{array}
\qquad \text{(TFD 4.2)}
$$

Para $\Theta = 0$

$$
\begin{array}{ll}
[p] = \dfrac{A^p}{p!} \cdot [0] & 0 \le p \le n \\[2ex]
[p] = \left(\dfrac{A}{n}\right)^{p-n} \cdot \dfrac{A^n}{n!} \cdot [0] & n \le p \le \infty \\[2ex]
\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} [p] = 1 & \\[2ex]
A = y \cdot s < n & \Theta = 0
\end{array}
\qquad \text{(TFD 4.3)}
$$

DISTRIBUCION DE ERLANG PARA SISTEMA DE RETARDO

<u>Note</u> - (TFD 4.3) requiere que $A < n$ satisfaga la condición de convergencia (TGD 3.18).

<u>Congestión de tiempo</u>

$$E = \sum_{p=n}^{\infty} [p]$$

For $\Theta = 0$

$$E = \frac{\dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}}{\displaystyle\sum_{v=0}^{n-1} \dfrac{A^v}{v!} + \dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}} = D_n(A) \qquad \text{(TFD 4.4)}$$

lo cual es la SEGUNDA FORMULA DE ERLANG

Para> 0 la expresión es más complicada pero totalmente calculable.

Para el caso especial $\theta = 1$, obtenemos

$$[p] = \frac{A^p}{p!} \cdot e^{-A} \qquad 0 \le p \le \infty$$

y

$$E = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \cdot e^{-A} \qquad \text{(TFD 4.5)}$$

El caso $\theta = 1$ es idéntico a la distribución de Poisson para un grupo de disponibilidad total en un sistema de pérdida (compare la sección TFL). El estado *(p)*, sin embargo, aquí significa n ocupaciones y $p - n$ llamadas en espera cuando $p > n$.

<u>Congestión de llamadas</u>

De acuerdo a (TFD 2.2),

$$B = P(>0) = \frac{\sum_{p=n}^{\infty} y[p]}{\sum_{p=0}^{\infty} y[p]} = \sum_{p=n}^{\infty} [p] = E$$

O sea $\boxed{\text{B = E}}$ (TFD 4.6)

puesto que y *(p) = y* independiente del estado del sistema, *(p)*. (Número infinito de fuentes).

Para $\Theta > 0$ la proporción de llamadas que abandonan la espera se calcula como

$$B_{gu} = \frac{\sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \cdot \frac{\Theta}{s} \cdot (p-n)}{\sum_{p=0}^{\infty} [p] \cdot y} = \frac{\Theta}{A} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \cdot (p-n) \qquad \text{(TFD 4.7)}$$

$$A = y \cdot s$$

De

$$(n + \Theta(p-n)) \cdot [p] = A \cdot [p-1]$$

ó

$$(p-n) \cdot [p] = \frac{A}{\Theta} \cdot [p-1] - \frac{n}{\Theta} \cdot [p]$$

y

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} (p-n) \cdot [p] = \frac{A}{\Theta} \cdot \sum_{p=n}^{\infty} [p] - \frac{n}{\Theta} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \qquad \text{(TFD 4.8)}$$

obtenemos

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} (p-n) \cdot [p] = \frac{1}{\Theta} \cdot \left(A \cdot E - n \cdot E + n \cdot [n] \right)$$

de modo que (TFD 4.7) puede escribirse

$$B_{gu} = \frac{n}{A} \cdot [n] + \frac{A-n}{A} \cdot E \qquad \text{(TFD 4.7a)}$$

donde *[n]* y *E* son dependientes de Θ.

Para $\Theta = 1$

$$B_{gu} = \frac{A^n}{n!} \cdot e^{-A} - \frac{n-A}{A} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \cdot e^{-A} \qquad \text{(TFD 4.9)}$$

En (TFD 4.7a) y (TFD 4.8) A puede ser $< n$ o $> n$.

Tráfico cursado y tráfico ofrecido

De acuerdo a (TFD 2.3), el tráfico cursado es

$$A' = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot [p] + \sum_{p=n}^{\infty} n \cdot [p] = A \cdot \sum_{p=1}^{n-1} [p-1] + n \cdot \sum_{p=n}^{\infty} [p]$$
$$A' = A \cdot \left(1 - \sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \right) + n \cdot E \qquad (A = y \cdot s)$$
$$A' = A \cdot \left(1 - [n-1] - E \right) + n \cdot E$$

$$A' = A + (n - A) \cdot E - n \cdot [n] \tag{TFD 4.10}$$

También advertimos que

$$A \cdot (1 - B_{gu}) = A + (n - A) \cdot E - n \cdot [n]$$

Para el tráfico ofrecido de acuerdo a (TFD 2.4)

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} s \cdot y[p] = s \cdot y \tag{TFD 4.11}$$

La diferencia entre A y A' es

$$\Delta A = A - A' = n \cdot [n] - (n - A) \cdot E \tag{TFD 4.12}$$

Para $\Theta = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} E = D_n(A) = \dfrac{\dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}}{\displaystyle\sum_{v=0}^{n-1} \dfrac{A}{v!} + \dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}} = \dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A} \cdot [0] \\ [n] = \dfrac{A^n}{n!} \cdot [0] \qquad\qquad D_n(A) = \text{ Segunda Formula de Erlang!} \end{array}} \tag{TFD 4.4a}$$

Consecuentemente

$$\frac{n}{n - A} \cdot [n] = E$$

o

$$n \cdot [n] = (n - A) \cdot E$$

de lo que sigue que

$$\begin{aligned} \Delta A &= 0 \\ A &= A' \\ \Theta &= 0 \end{aligned} \tag{TFD 4.13}$$

Para $\Theta > 0$, por otro lado,,

$$A > A' \tag{TFD 4.14}$$

De acuerdo a (TFD 2.6) y (TFD 4.9) la longitud media de la cola = número medio de llamadas en espera en el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} Q = \sum_{p=n+1}^{\infty} (p-n) \cdot [p] = \dfrac{1}{\Theta} \cdot \left(n \cdot [n] - (n-A) \cdot E\right) \\ \qquad\qquad \Theta > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.15)}$$

Para $\Theta = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Q = \dfrac{A}{n-A} \cdot D_n(A) \\ \Theta = 0 \\ A < n \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.16)}$$

<u>Probabilidad de que x dispositivos específicos estén ocupados</u>

Para <u>cacería aleatoria</u> $\Theta = 0$, obtenemos, de acuerdo a (TDG 3.11) (después de algún nuevo arreglo)

$$\left.\begin{array}{l} H(x) = \dfrac{n-A}{n} \cdot D_n(A) \cdot \left(\dfrac{1}{E_{n-x}(A)} + \dfrac{A}{n-A} \right) \\ \Theta = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.17)}$$

donde $E_n(A)$ es la Primera Fórmula de Erlang (TFL 3.1E). La relación entre $D_n(A)$ y $E_n(A)$ puede ser escrita:

$$\begin{array}{l} D_n(A) = \dfrac{n \cdot E_n(A)}{n - A \cdot \left(1 - E_n(A)\right)} \\ (A < n) \end{array} \qquad \text{(TFD 4.18)}$$

ó

$$\left.\begin{array}{l} E_n(A) = \dfrac{(n-A) \cdot D_n(A)}{n - A \cdot D_n(A)} \\ A < n \qquad \Theta = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.18a)}$$

<u>Carga en el dispositivo ν:ésimo</u>

Como N = ∞, la carga en el dispositivo ν:ésimo en un grupo de disponibilidad total y <u>cacería secuencial</u> puede calcularse así

$$\begin{array}{l} a_\nu = b_\nu + (1 - b_\nu) \cdot \dfrac{A}{n} \cdot D_n(A) \\ b_\nu = A \cdot \left(E_{\nu-1}(A) - E_\nu(A)\right) \\ \Theta = 0 \end{array} \qquad \text{(TFD 4.19)}$$

Para <u>cacería aleatoria</u>

$$\left.\begin{array}{l} a_\nu = \dfrac{A'}{n} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{n-A}{n} \cdot E - [n] \\ \Theta > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.20)}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} a_\nu = \dfrac{A}{n} \\ \Theta = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.20a)}$$

El efecto de diferentes valores Θ - puede ilustrarse por medio del siguiente ejemplo numérico para N = 4, A = 3:

Característica	$\Theta = 0$	$\Theta = 1$	$\Theta = 2$	$\Theta = \infty$
$E = B$	0.509	0.353	0.314	0.206
B_{gu}	0	0.107	0.133	0.206
Q	1.528	0.319	0.199	0
A'	3	2.681	2.601	2.382
A	3	3	3	3
$\frac{A - A'}{A}$	0	0.107	0.133	0.206
$\frac{B_{gu}}{B}$	0	0.302	0.424	1.000

(El caso $\Theta = \infty$ es idéntico a un sistema de pérdida ya que las llamadas congestionadas se abandonan inmediatamente).

5. Distribución de tiempo de espera

El tiempo medio de espera (*U*) es usualmente independiente de la disciplina de la disposición en cola, mientras que la distribución del tiempo de espera *f(t)* es fuertemente dependiente de ella. No hay método general para la derivación de *U y f (t)* y las expresiones para ellos no son, por lo general, expresiones explícitas simples.

Los casos más simples se obtienen con la disposición en cola ordenada, siendo la más simple la distribución de tiempo de espera de Erlang (TFD 4.3). Nos limitaremos a este caso.

Para (TFD 4.3) el tiempo medio de espera para llamadas en espera es

$$u = \frac{s}{n - A} \qquad \text{(TFD 5.1)}$$

y para todas las llamadas

$$\begin{aligned} &U = P(> 0) \cdot u = D_n(A) \cdot \frac{s}{n - A} \\ &\Theta = 0 \end{aligned} \qquad \text{(TFD 5.2)}$$

La distribución de tiempo de espera para llamadas en espera, será de acuerdo a

$$P_v(> t_0) = e^{-\frac{n-A}{s} \cdot t_0} \qquad \text{(TFD 5.3)}$$

y para todas las llamadas

$$\left.\begin{aligned} &P(\tau = 0) = 1 - D_n(A) \\ &P(\tau > t_0) = D_n(A) \cdot e^{-\frac{n-A}{s} \cdot t_0} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 5.4)}$$

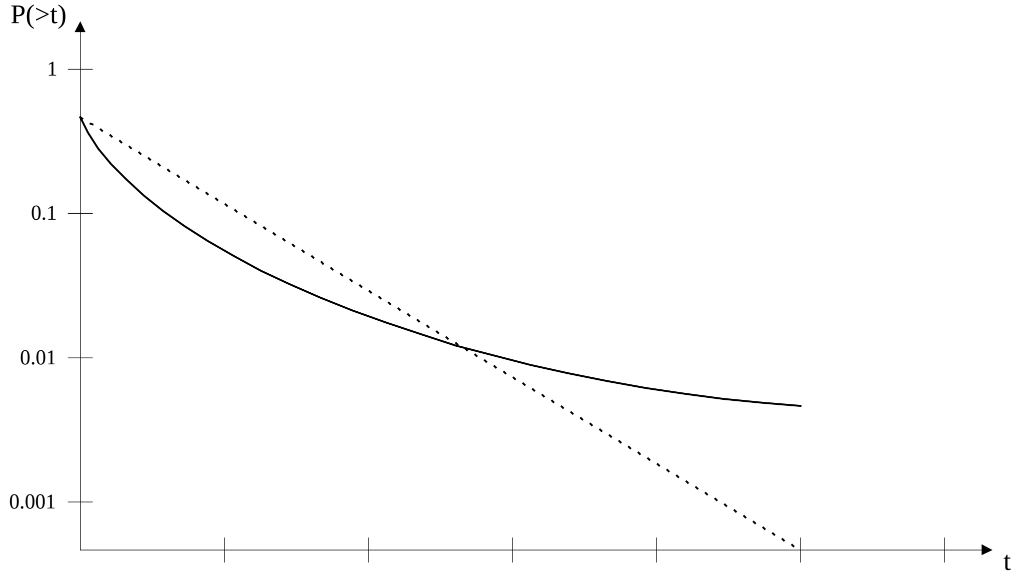


FIGURA TFD 5/1

Distribución del tiempo de espera para todas las llamadas con colas ordenadas (línea punteada) y con colas aleatorias.
Los dos casos tienen el mismo valor medio.
No hay llamadas en espera que desistan ($\Theta = 0$).

6. <u>Sistema de espera con tiempo de ocupación constante: la distribución de Crommelin:</u>

Para casos con tiempo de ocupación constante, no se aplican los supuestos hechos en la sección TGD. Para derivar casos de este tipo, uno puede usar las ecuaciones de estado de Fry.

Ecuaciones de estado de Fry. Concepto.

Asuma equilibrio y considere el sistema en los puntos de tiempo t y $t + h$, donde h es el tiempo de ocupación constante.

Las ocupaciones que se encontraban en progreso en t se habrán completado en $t + h$, en $t + h$ ahora sólo hay llamadas que estaban haciendo cola en t y llamadas nuevas.

$$[p]_{t+h} = \sum_{v=0}^{n} [v]_t \cdot P(p,h) + \sum_{v=n+1}^{n+p} [v]_t \cdot P(p-v+n,h) \qquad \text{(TFD 6.1)}$$

$P(p,h)$ = probabilidad de que exactamente p llamadas ocurran durante el intervalo $(t, t + h)$.

Para $N = \infty$, $\Theta = 0$ y una cola ordenada, se obtiene la distribución de Crommelin.

Para n = 1 el tiempo medio de espera para todas las llamadas es

$$U = \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{1-a} \qquad \text{(TFD 6.2)}$$

a = tráfico ofrecido = tráfico cursado < 1.

Para $n > 1$ la solución exacta será muy complicada. Uno puede, sin embargo, usar una modificación de la expresión aproximada de Molina:

$$U \cong \frac{h}{n+1} \cdot \frac{D_n(A)}{1-a} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a^n} \cdot \frac{1}{1+a}$$
$$a = \frac{A}{n} < 1 \qquad n \geq 1 \qquad \text{(TFD 6.3)}$$

Obsérvese que (TFD 6.2), da, para tiempo de ocupación constante, exactamente la mitad del tiempo medio de espera obtenido para tiempos de ocupación exponencialmente distribuidos con el mismo tiempo medio de ocupación. La expresión (TFD 5.2) da para

$$n = 1 \quad A = a \quad s = h$$
$$U = h \cdot \frac{a}{1-a} \qquad \text{(TFD 6.4)}$$

(distribución exponencial)

Para $n = 1$

$$U_{const} = \frac{1}{2} \cdot U_{exp} \qquad \text{(TFD 6.5)}$$

y para n arbitrario de acuerdo a (TFD 6.3) y (TFD 5.2):

$$U_{const} = U_{exp} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a^n} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \text{(TFD 6.6)}$$

esto es

$$U_{const} < U_{exp}$$

La distribución del tiempo de espera para el caso de Crommelin puede escribirse:

$$\left.\begin{aligned} &P(t=0) = 1 - D_n(A) \\ &P(t > t_0) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{n-1} P_v \cdot \frac{(A \cdot B)^x}{x!} \cdot e^{-A \cdot B} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 6.7)}$$

donde

$$\left\{\begin{aligned} B &= \mu - \left(\frac{t_0}{h} - \left\{ \frac{t_0}{h} \right\} \right) \\ x &= \left(\mu + \left\{ \frac{t_0}{h} \right\} \right) \cdot n + n - 1 - v \\ P_v &= \sum_{p=0}^{v} [p] \\ \left\{ \frac{t_0}{h} \right\} &= \text{ la parte entera de } \frac{t_0}{h} \\ \text{A} &= \text{ tráfico ofrecido } < \text{ n} \end{aligned}\right.$$

La probabilidad $P(t>t_0)$ de tiempos de espera largos será menor para (TFD 6.7) que para (TFD 5.4).

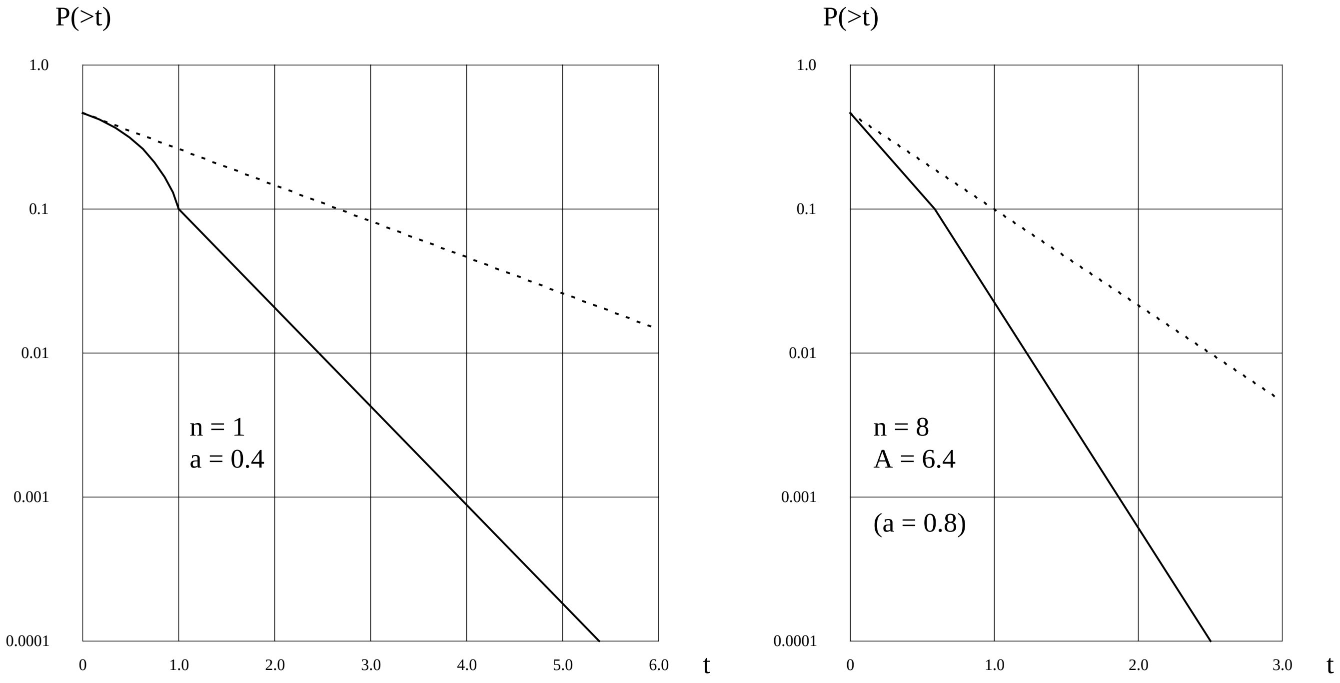


FIGURA TFD 6/1 : Distribución del tiempo de espera para todas las llamadas con tiempos de ocupación distribuidos exponencialmente (línea punteada) y con tiempos de ocupación constantes. Número infinito de fuentes y cola ordenada; no hay llamadas que desistan *(θ = 0)*. El tiempo *t* se expresa en múltiplos del tiempo de espera constante.

7. Distribución de tiempos de ocupación compuestos

En muchos casos prácticos, las distribuciones de tiempos de ocupación no son constantes ni distribuidos exponencialmente. Usualmente hay una composición de diferentes tiempos de ocupación constantes. Con frecuencia, también, algunos de esos tiempos de ocupación se prolongan por la necesidad de esperar por otros dispositivos. Este tiempo de espera puede, con frecuencia, tener el carácter de una distribución aproximada.

Si uno determina la distribución del tiempo de ocupación real con su media *h* y su varianza σ^2 estarán entre los valores correspondientes para los casos con tiempo de espera constante y exponencial para todas las llamadas
($\theta = 0$).

Número infinito de fuentes ($N = \infty$)

$$U \approx \left(1 - \frac{\sigma^2}{\bar{h}^2}\right) \cdot U_{const} + \frac{\sigma^2}{\bar{h}^2} \cdot U_{\exp} \qquad \text{(TFD 7.1)}$$

donde

$\bar{h} = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt$ es el tiempo medio de ocupación

$\sigma^2 = \int_{t=0}^{\infty} (t - \bar{h})^2 \cdot f(t)\, dt$ es la varianza

U_{const} a partir de (TFD 6.3) (Molina modificado)

$U_{\exp}$ a partir de (TFD 5.2) (Erlang)

$\bar{h}$ y σ^2 a partir de la distribución de tiempo de ocupación.

Para tiempo de ocupación constante tenemos $\sigma^2 = 0$ y $U = U_{const}$.

Para una distribución de tiempo de espera exponencial tenemos $\sigma^2 = \bar{h}^2$ y $U = U_{\exp}$.

A *U* no le afecta la disciplina de la disposición en cola .

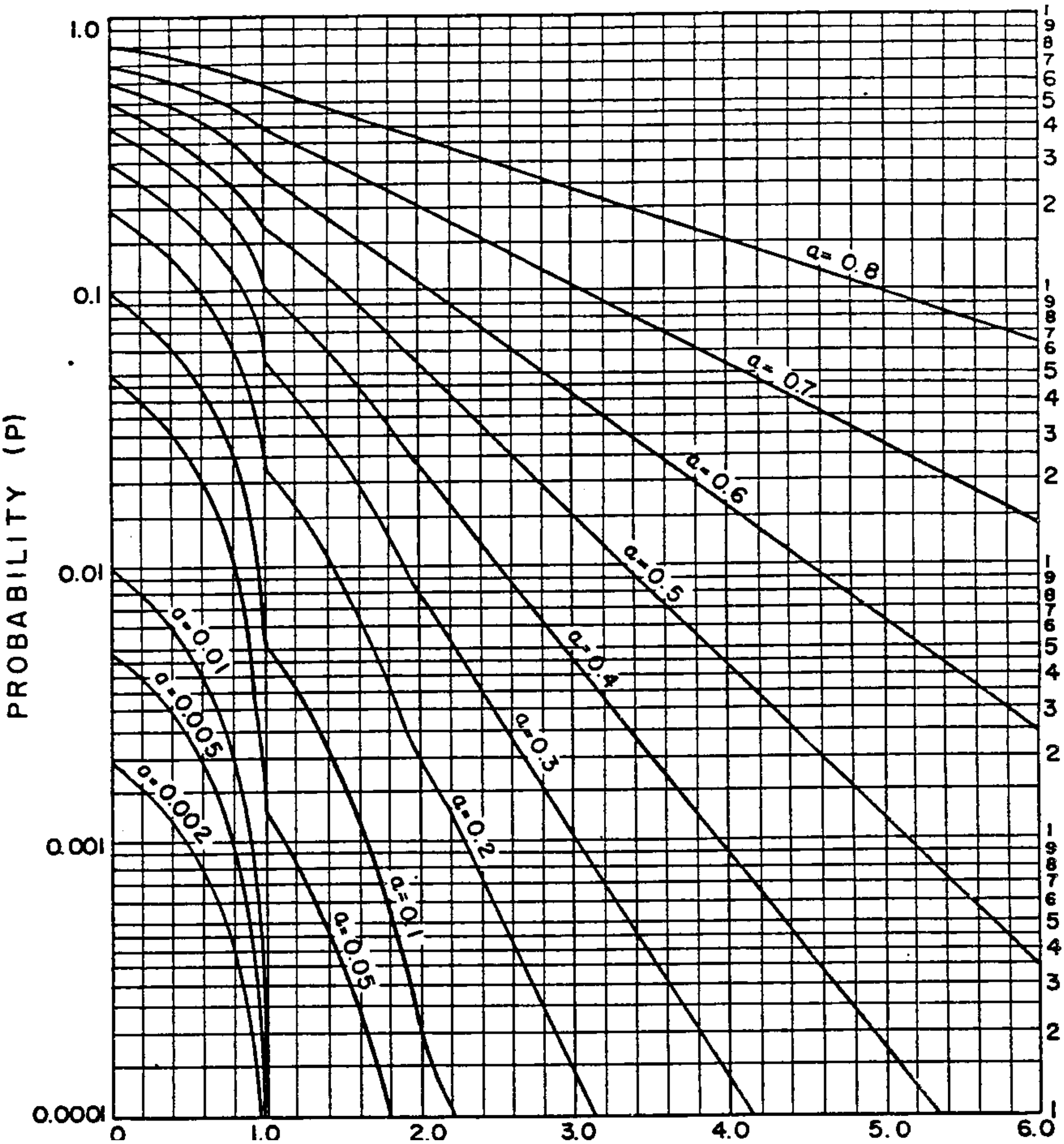
Número finito de fuentes

Con un número finito de fuentes, los tiempos de espera son limitados al compararse con $N = \infty$. Un método aproximado para tomar en cuenta este efecto, con distribución de tiempo de ocupación compuesta y número finito de fuentes, es usar la siguiente fórmula para el tiempo medio de espera para todas las llamadas:

$$U(n,N) = \left\{\left(1 - \frac{\sigma^2}{\bar{h}^2}\right) \cdot U_{const} + \frac{\sigma^2}{\bar{h}^2} \cdot U_{\exp}\right\} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \qquad \text{(TFD 7.2)}$$

donde

$$\begin{cases} U_{const} \text{ de (TFD 6.3) (Molina modificado)} \\ U_{\exp} \text{ de (TFD 5.2) (Erlang)} \\ \bar{h} \text{ y } \sigma^2 \text{ de la distribución de tiempo de ocupación.} \end{cases}$$



TIEMPO (t) MEDIDO EN MULTIPLOS DEL TIEMPO DE OCUPACION

FIGURA A

Probabilidad *P* de que un espera exceda *t*

cuando hay *n = 1* conmutadores con ocupación α

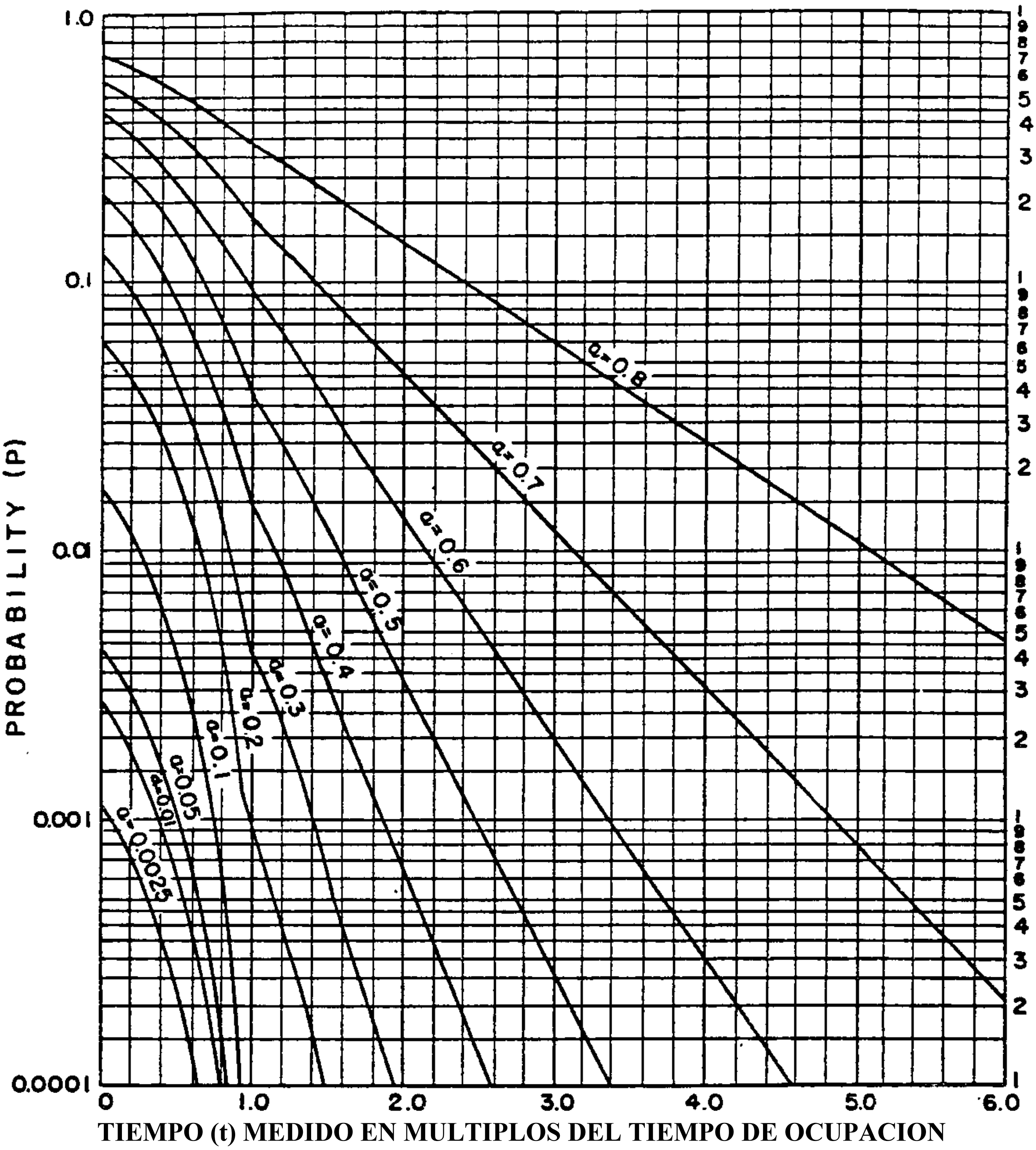
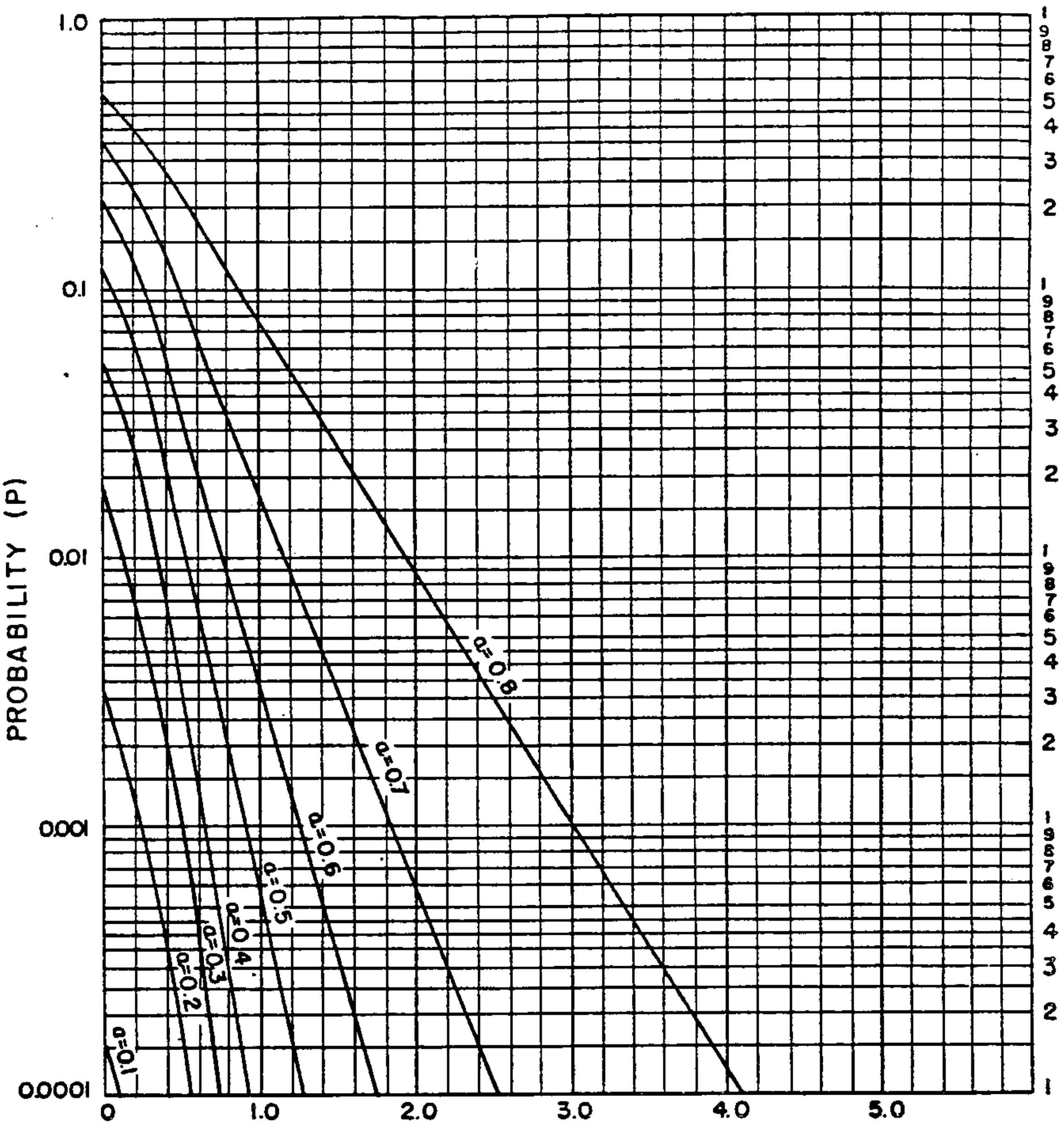


FIGURA B

Probabilidad *P* de que un espera exceda *t*

cuando hay *n = 2* conmutadores con ocupación α

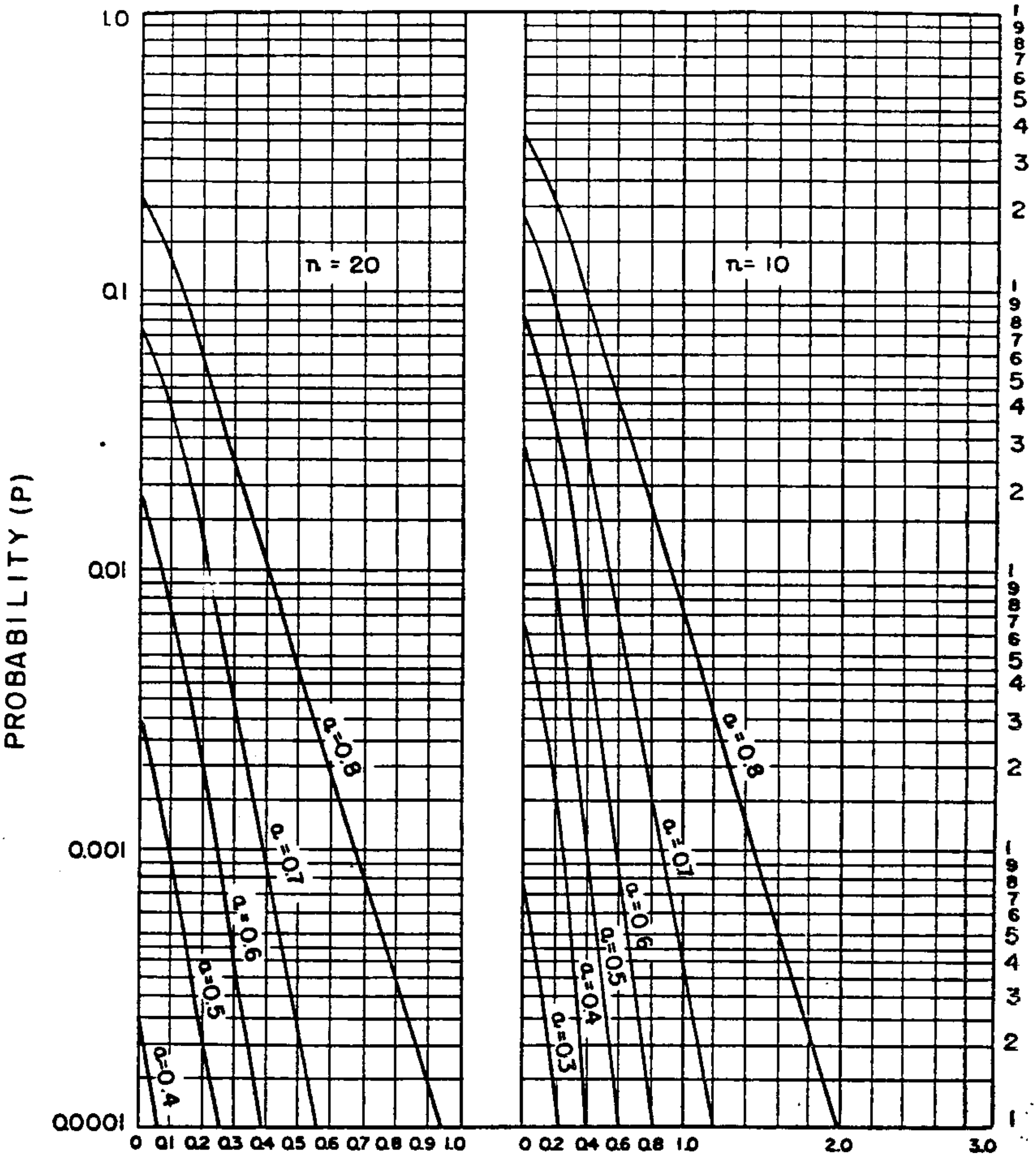


TIEMPO (t) MEDIDO EN MULTIPLOS DEL TIEMPO DE OCUPACION

FIGURA C

Probabilidad *P* de que un espera exceda *t*

cuando hay *n = 5* conmutadores con ocupación α



TIEMPO (t) MEDIDO EN MULTIPLOS DEL TIEMPO DE OCUPACION

FIGURA D

Probabilidad *P* de que un espera exceda *t*

cuando hay $n = 10$ y $n = 20$ conmutadores con ocupación α

FIGURA TFD 7/1

DISTRIBUCION DE CROMMELIN. GRAFICOS QUE MUESTRAN LA PROBABILIDAD DE TENER QUE ESPERAR MAS QUE UN TIEMPO DADO. ESTE TIEMPO SE EXPRESA EN MULTIPLOS DEL TIEMPO DE OCUPACION CONSTANTE

Distribución del tiempo de espera

Las expresiones para la distribución del tiempo de espera de una distribución de tiempo de ocupación compuesto, son usualmente muy complicadas. La disciplina de la disposición en cola, aún más, tiene un gran significado. La probabilidad de tiempos de espera muy cortos o muy largos es mayor con una cola aleatoria que con una ordenada.

Con una cola de prioridad, el resultado es casi el mismo que en los casos con un número finito de fuentes donde el número de fuentes = la prioridad.

8. Comentarios generales; Notaciones de Kendall

Durante las últimas décadas se ha llevado a cabo una enorme cantidad de estudios teóricos sobre sistemas de espera. Estos estudios, que usan diferentes combinaciones de supuestos de entrada, tiempo de servicio y disciplina de la disposición en cola, tratan principalmente con la descripción de los casos de espera fuera del campo de las telecomunicaciones. Se estima que actualmente puede haber al menos 1000 artículos y 100 libros sobre problemas de disposición en cola en las librerías. Es muy claro que tal ola de interés en dichos problemas, ha sido también beneficiosa y fructífera para el tratamiento de los problemas de espera dentro del campo de las telecomunicaciones. Sin embargo, la mayoría de las soluciones que se presentan involucran expresiones matemáticas más bien complicadas que tienen que usarse para llegar a resultados prácticos. Por tanto, las fórmulas por largo tiempo conocidas de Erlang, Molina, Fry, Crommelin y otros son todavía muy valiosas cuando se trata de cálculos prácticos.

Para cubrir el vacío de las fórmulas simples existentes, que no pueden proveer resultados prácticos exactos, el ingeniero de tráfico de hoy generalmente prefiere usar simulaciones de computadora. Siempre que las condiciones reales se reflejen correctamente en los supuestos para los programas de simulación, este método proporciona resultados fiables, que pueden transferirse al diseño y dimensionamiento de los sistemas de espera utilizados en la planta de telecomunicaciones. Las simulaciones también recomiendan cuando pueden aplicarse fórmulas simples de aproximación y cuando no deben usarse.

Con el propósito de definir con facilidad los supuestos usados en el estudio del sistema de espera, D.G. Kendall introdujo un sistema de notaciones, que mediante letras de código describe los supuestos para:

a) el proceso de entrada;
b) los tiempos de ocupación/servicio;
c) el número de servidores;
d) la disciplina de la disposición en cola.

Puesto que notaciones como M/ MI (FIFO) se usan con frecuencia en la literatura, hay razón para referirnos a ellas aquí. (First in - First out, FIFO; Primero en entrar, primero en salir, PEPS).

Por tanto, una clasificación de un sistema de disposición en cola

a/ b/ c/ (d)

Para el proceso de entrada, *a*, se usan las siguientes notaciones:

M = Intervalos distribuidos exponencialmente entre llamadas, o sea entrada de Poisson, (Número infinito de fuentes)

D = Entrada determinística, o sea, intervalos constantes entre llamadas;

G = Distribución general para intervalos entre llamadas;

GI = Intervalos independientes generales;

E_k = Intervalos distribuidos según k de Erlang (donde $E_1 \subseteq M$).

Para la distribución del tiempo de ocupación, b), se usan las mismas letras que para a), definiéndose así la distribución del tiempo de ocupación.

Para el número de servidores, c), la notación es usualmente

1 para un servidor,

n para un número arbitrario de servidores.

Para la disciplina de la disposición en cola, d), ejemplos de notación típicos son:

PEPS: Primero en entrar - Primero en salir (cola ordenada)

RANDOM: Cola aleatoria.

Consecuentemente, como un ejemplo del sistema de clasificación de Kendall, M/ M/n (PEPS) define la distribución de Erlang para sistemas de espera definida en (TFD 4.3), (TFD 5.1) - (TFD 5.4)) como un grupo de disponibilidad total con un número arbitrario de (n) dispositivos, y cuando no hay usuarios que desistan de sus llamadas. De la misma manera, M/D/n (PEPS) define la distribución de tiempo de espera de Crommelin para una entrada de Poisson, tiempos de ocupación constantes y cola ordenada, tal como se describió en la sección TFD 3.

El sistema de clasificación no da un panorama completo del sistema considerado debido a que faltan los detalles siguientes desde el punto de vista de la Teoría de Teletráfico:

- número de fuentes de tráfico individuales que generan entrada de tráfico;
- otros arreglos de agrupación que no son de disponibilidad total, como por ejemplo: interconexiones graduales (gradings), sistemas de enlace, etc;
- las reglas de cacería, siempre que la cacería de dispositivos libres tenga un impacto en el caso de tráfico;
- llamadas retrasadas esperando o no hasta ser atendidas.

Esta sección solamente ha tratado sobre grupos de disponibilidad total donde sólo hay una etapa de espera posible, es decir, fuera del grupo antes que las llamadas sean servidas. Sin embargo, las técnicas de telecomunicaciones también presentan casos de espera más complicados, especialmente cuando se trata de procesar llamadas en marcadores, procesadores y otro equipo común. En el procedimiento de establecimiento de una llamada, la espera puede ocurrir en diferentes etapas de este procedimiento, lo que significa que el tiempo de establecimiento total puede consistir en la suma de tiempos de trabajo más un número de posibles tiempos de espera. Este tipo de sistema de espera se llama: Sistema de Espera Compuesto y se tratará en otra sección.

Teoría Básica de teletráfico (T)

EJERCICIOS B

Grupo de Disponibilidad Total, Sistema de Espera

Ejercicios Básicos

TXB 1

A un grupo de disponibilidad total en un sistema de espera consistente de 30 dispositivos, se le ofrece un tráfico con una tasa de llamadas de 700 llamadas/horas y un tiempo medio de ocupación de 108 segundos.

Suponiendo que se cumplen los supuestos para la distribución de Erlang para los sistemas de espera, calcule

a) el tráfico ofrecido;
b) la probabilidad del espera;
c) el tráfico manejado;
d) la media del tráfico manejado por dispositivo;
e) el tiempo medio de espera para todas las llamadas;
f) el tiempo medio de espera para llamadas que tienen que esperar.

TXB 2

Los mismos supuestos y valores numéricos que en el ejercicio TXB 1. Asuma además que la cola se sirve en orden de llegada.

a) Calcule la probabilidad de que una llamada tenga que esperar más de 3, 6, 12, 24, segundos;
b) Calcule la probabilidad de que una llamada tenga que esperar más de 3, 6, 12, 24 segundos, dado que tuviera que esperar.

TXB 3

Se asume que las llamadas llegan a un dispositivo en un sistema de espera de acuerdo al proceso de Poisson, con una tasa de llamadas de 4,320 llamadas/hora.

Se asume que los tiempos de ocupación son independientes el uno del otro y del proceso de llegada. Se asume que siguen una distribución exponencial, con un tiempo de ocupación medio de S segundos.

Se asume además, que ninguna de las llamadas en la cola desisten de esperar y que las llamadas en la cola se atienden en orden de llegada.

Cuál es el valor más grande de S en segundos, que puede permitirse para satisfacer la condición de que la probabilidad de que una llamada tenga que esperar más de 3 segundos no sea mayor de 0.01?

TXB 4

Cuál es la máxima tasa de llamadas que puede ofrecerse a un grupo de disponibilidad total de dos dispositivos, en un sistema de espera, si el tiempo medio de espera para todas las llamadas será a lo sumo de 2 segundos.

Se sabe que el tiempo medio de ocupación es de 0.4 segundos y que se cumplen los supuestos de la distribución de Erlang para sistemas de espera.

TXB 5

Demuestre que

$$E_1\ (A) < E_2\ (A)$$

TXB 6

Considere un sistema de espera de Erlang con 10 troncales y un tráfico ofrecido de 8 Erlangs. El tiempo medio de conversación es de 5 minutos. Las llamadas retrasadas se atienden en orden de llegada. Cuál es la probabilidad de que una llamada que llega y encuentra otra llamada en la cola tenga que esperar más de 0.5 minutos?

TXB 7

Considere un sistema de espera de Erlang con $n = 10$ troncales y $A = 4$ erlangs. Calcule la proporción de tiempo cuando hay al menos una llamada en espera.

TXB 8

A 1 dispositivo, en un sistema de espera, llegan llamadas de acuerdo a un proceso de Poisson, con una tasa de 4,320 llamadas/hora.

Los tiempos de ocupación son variables aleatorias independientes, c
on una y la misma distribución:

$$\text{P}\left\{\text{tiempo de ocupación} = 0.2 \text{ sec.}\right\} = \frac{1}{3}$$

$$\text{P}\left\{\text{tiempo de ocupación} = 0.4 \text{ sec.}\right\} = \frac{2}{3}$$

Los tiempos de ocupación de los tiempos entre llegadas son independientes y no hay llamadas que abandonen la cola.

a) Cuál es la probabilidad de espera?
b) Cuál es el tiempo medio de espera para llamadas que tengan que esperar?
c) Cuál es el tiempo medio de espera para todas las llamadas ?

TXB 9

Se considera un dispositivo en un sistema de espera.

Se asume que las llamadas llegan de acuerdo a un proceso de Poisson, con una tasa de llamadas de 2,880 llamadas/hora.

Se asume que los tiempos de ocupación son variables aleatorias independientes, con una distribución dada por la función de frecuencia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 16 \cdot t \cdot e^{-4 \cdot t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde t se mide en segundos.

Se asume que los tiempos de ocupación y los tiempos entre llegadas son independientes uno del otro y se asume, además, que ninguna llamada en cola desiste de esperar.

a) Cuál es la probabilidad de espera?
b) Cuál es el tiempo medio de espera para llamadas que tienen que esperar?
c) Cuál es el tiempo medio de espera para todas las llamadas?