Théorie pour les groupes à accessibilité totale,

Système avec attente

(Exercices inclus)

Du TETRAPRO, édité par Mr. H. Leijon, ITU

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

Théorie de Base du Télétrafic (T)

THEORIE DU GROUPE A ACCESSIBILITE TOTALE, SYSTEME AVEC ATTENTE (TFD)

Sommaire

1. Suppositions

Un système avec attente est caractérisé par le fait que les appels bloqués peuvent attendre et être servis quand un équipement devient disponible.

Pour la supposition (TGD 2.9) cela signifie que

$$W\,(p) = 1 \text{ pour tous les } p \qquad \text{(TFD 1.1)}$$

Il signifie aussi qu'un système avec attente devrait être capable d'accepter comme appels en fils d'attente tant qu'il peut être produit. Un système, qui peut accepter seulement un nombre limité d'appels en attente, fonctionne sur cette limite comme un système avec perte et devrait être considéré comme un système combiné avec attente et avec perte.

Ici on devrait traiter seulement avec les systèmes avec attente où $W(p) = 1$ pour tous les p.

On peut aussi supposer que tous les appels en attente attendent jusqu'à ce qu'ils soient servis ou abandonnent. Les deux suppositions sont traitées dans ce qui suit. Les expressions mathématiques seront simplifiées.

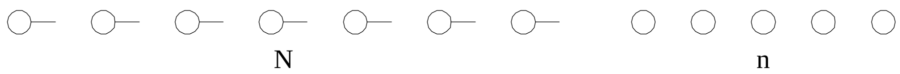
Pour un traitement complet du système avec attente il est nécessaire de définir la discipline de la queue, c à d la manière dans la quelle le prochain appel servi est sélectionné de la queue. On peut distinguer entre trois méthodes essentielles de queue:

1. queue ordonnée (premier arrivée, premier servi);
2. queue aléatoire (chaque appel dans la queue a la même probabilité qu'il soit servi prochainement);
3. queue avec priorité (tous les appels en attentes ont des priorités différentes, celui qui a la priorité la plus élevée est servi en premier).

Il y a aussi une combinaison entre ces disciplines de queue, comme dans les cas dans lesquels la queue à deux pas est utilisée (à partir d'une salle de l'extérieur un nombre est pris à l'intérieur de la salle interne; tous dans la salle intérieur sont servis avant que les nouveaux appels sont admis).

La discipline de la queue a une influence sur la distribution du temps d'attente, mais non généralement sur le temps moyen d'attente.

Considérons un groupe à accessibilité totale (N,n)



L'état du système est défini comme (p), où

$$0 \le p \le N \qquad \text{(TFD 1.2)}$$

Pour $p > n$ l'état (p) implique que n équipements sont engagés et que $p- n$ appels sont en attente.

Il est évident que N devrait être $> n$ pour qu'un délai se présente. Cela exclus la supposition pour que la distribution de Bernoulli devrait être considérée pour un système avec attente. Pour le cas $N = \infty$, $n = \infty$, il n'est pas considéré qu'une attente peut se présenter. Cependant, les suppositions pour la distribution de poisson ne sont pas valables ici.

Ainsi les systèmes avec attente sont limités aux cas où

$$N > n \qquad \text{(TFD 1.3)}$$

où N peut être fini ou infini, alors que n devrait aussi être fini.

Pour les intensités d'arrivée il est supposé que

$$\left.\begin{aligned} \mu_p &= \frac{p}{s} && pour\ \ 0 \le p \le N \\ \mu_p &= \frac{n}{s} + \frac{\Theta}{s} \cdot (p-n) && pour\ \ \ \ \ \ p > n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.4)}$$

$\Theta > 0$ signifie qu'un appel en attente abandonne avec une intensité Θ / s.
$\Theta = 0$ implique que tous les appels attendent jusqu'à ce qu'ils soient servis. La supposition
$\Theta > 0$ implique que les appels en attente continuent d'attendre pour un temps décrit par une distribution exponentielle

$$f(t) = \frac{\Theta}{s} \cdot e^{-\frac{\Theta}{s} \cdot t} \qquad \text{(TFD 1.5)}$$

avec la valeur moyenne $\frac{s}{\Theta}$

L'expression (TDF 1.4) donne la solution générale suivante:

$$\left.\begin{aligned} [p] &= \frac{s^p \cdot \prod_{\nu=0}^{p-1} y(\nu)}{p!} \cdot [0] && pour\ \ 0 \le p \le N \\ [p] &= \frac{s^p}{\Theta^{p-n}} \cdot \frac{\prod_{\nu=0}^{p-1} y(\nu)}{n! \prod_{\nu=n+1}^{p} \left(n \cdot \frac{1-\Theta}{\Theta} + \nu \right)} \cdot [0] && pour\ \ n < p \le N \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.4a)}$$

où N peut être soit fini ou infini.

Pour les intensités de croissance il est supposé que

$$\lambda = y(p) \cdot W(p) \qquad \text{(TFD 2.9)}$$

où $\quad W(p) = 1$ pour toutes p. $\qquad 0 \le p \le N$

et

$$\left.\begin{aligned} y(p) &= (N-p) \cdot \beta && \textbf{EB}\ \ type \\ y(p) &= y && \textbf{E}\ \ type \\ y(p) &= a \cdot (\gamma + p) && \textbf{TNB}\ type \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.6)}$$

L'insertion de (TDF 1.4) et (TGD 2.9) dans (TGD 1.11) donne

$$\left.\begin{aligned} p \cdot [p] &= s \cdot y(p-1) \cdot [p-1] \quad pour\ 0 \le p \le n \\ (n + \Theta \cdot (p-n)) \cdot [p] &= s \cdot y(p-1) \cdot [p-1] \quad pour\ n < p \le N \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 1.7)}$$

A partir de (TDF 1.7) la solution pour les différentes suppositions concernant $y(p)$ comme donné dans (TFD 1.6) est donc obtenue par recrutions et utilisant

$$\sum_{p=0}^{N} [p] = 1$$

Il est compris que croître Θ signifie que l'attente devrait être courte avant que l'appel abandonne. Si $\Theta = 1$, aucun appels n'attend et le système devient un système avec perte.

2. Quelques caractéristiques pour les systèmes avec attente

En addition aux quantités définies pour les systèmes avec perte, le temps d'attente devrait être également spécifié pour les systèmes avec attente.

Congestion de temps

Le temps de congestion est défini ici comme la probabilité que tous les équipements sont engagés. Par conséquent,

$$E = \sum_{p=n}^{N} [\,p\,] \qquad \text{(TFD 2.1)}$$

Congestion d'appel

La congestion d'appel est définie comme la probabilité qu'un appel devrait attendre = la proportion des appels qui devraient attendre. Par conséquent,

$$B = P(>0) = \frac{\sum_{p=n}^{N} y(p)\cdot[\,p\,]}{\sum_{p=0}^{N} y(p)\cdot[\,p\,]} \qquad \text{(TFD 2.2)}$$

Probabilité d'abandonner l'attente

La proportion espérée des appels qui abandonnent l'attente est calculée comme

$$B_{gu} = \frac{\sum_{p=n+1}^{N} [\,p\,]\cdot\frac{\Theta}{s}\cdot(n-p)}{\sum_{p=0}^{N} y(p)\cdot[\,p\,]} \qquad \text{(TFD 2.2a)}$$

où N peut être soit fini ou infini.

Trafic offert et écoulé

Le trafic écoulé par les n équipement est

$$A^{1} = \sum_{p=0}^{n-1} p[\,p\,] + \sum_{p=n}^{N} n\cdot[\,p\,] \qquad \text{(TFD 2.3)}$$

Le trafic offert est

$$A = \sum_{p=0}^{N} s\cdot y(p)\cdot[\,p\,] \qquad \text{(TFD 2.4)}$$

La relation entre A et A^{1} est obtenu à partir de

$$\left.\begin{array}{ll} s\cdot y(p)\cdot[\,p\,] = (p+1)\cdot[\,p+1\,] & pour\ 0 \le p < n \\ s\cdot y(p)\cdot[\,p\,] = (n+\Theta\cdot(p-n+1))\cdot[\,p+1\,] & pour\ n \le p < N \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 1.7)}$$

observant que $y(N) = 0$. Quand il n'y a pas de sources libres, aucun autre appel ne peut être offert.

$$\sum_{p=0}^{N} s\cdot y(p)\cdot[\,p\,] = \sum_{p=1}^{n} p\cdot[\,p\,] + \sum_{p=n+1}^{N}\bigl(n+\Theta\cdot(p-n)\bigr)\cdot[\,p\,]$$

Par conséquent,

$$A = A^{1} + \Theta \cdot Q \qquad \text{(TFD 2.5)}$$

où

$$Q = \sum_{p=n+1}^{N} (p-n) \cdot [p] \qquad \text{(TFD 2.6)}$$

Q est le nombre moyen des appels en attente dans le système = <u>la longueur moyenne de la queue</u> calculée sur la période entière (incluant les occasions où il n'y a pas d'appels en attente).

Il est évident que

$$\boxed{\begin{array}{l} A = A^{1} \;\; pour \;\; \Theta = 0 \\ A > A^{1} \;\; pour \;\; \Theta > 0 \end{array}} \qquad \text{(TFD 2.7)}$$

<u>Le facteur d'amélioration</u>

Le facteur d'amélioration est défini comme la quantité additionnelle du trafic qui peut être écoulé si le nombre de circuits croit de n à $n + \Delta n$.

$$F = A^{1}(n+\Delta n) - A^{1}(n) \qquad \text{(TFD 3.10)}$$

<u>Probabilité que x circuits sont engagés</u>

Pour les systèmes avec attente, selon (TGD 3.11), cette probabilité est

$$H_x = \sum_{p=x}^{n-1} [p] \cdot \frac{\binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p}} + \sum_{p=n}^{N} [p] \qquad \text{(TFD 3.11)}$$

<u>Temps d'attente</u>

La distribution du temps d'attente dépend sur la discipline de la queue. Si la fonction de fréquence des temps d'attente est dénotée par $f(t)$, le temps moyen de maintien pour les appels avec attente est

$$u = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt \qquad \text{(TFD 2.8)}$$

alors que le temps moyen d'attente pour tous les appels est

$$U = P(>0) \cdot \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt \qquad \text{(TFD 2.9)}$$

$P(>0)$ = la probabilité qu'un appel devrait attendre, c à d.

$$U = P(>0) \cdot u \qquad \text{(TFD 2.9a)}$$

$$U < u \qquad \text{(TFD 2.10)}$$

Distributions du temps d’attente

La probabilité des temps d’attente longues (pénibles) est généralement plus importante du point de vue service. La probabilité pour qu’un appel en attente devrait attendre plus qu’un temps t_0:

$$P_v(>t_0) = P_v(t>t_0) = \int_{x=t_0}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{(TFD 2.11)}$$

La probabilité pour qu’un appel arbitraire devrait attendre plus qu’un temps t_0:

$$P(>t_0) = P(>0)\cdot P_v(>t_0) \qquad \text{(TFD 2.12)}$$

$$P(>t_0) = P(>0)\cdot \int_{x=t_0}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{(TFD 2.12a)}$$

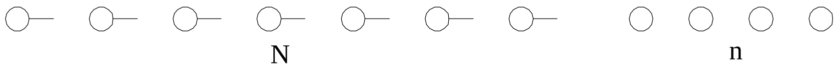
La distribution du temps d’attente dépend de la discipline de la queue, alors que le temps moyen est presque toujours indépendant de la discipline de la queue.	(TFD 2.13)

Puisque l’attente peut arriver seulement quand le nombre de sources est supérieur au nombre de circuits *($N>n$)*, il y a seulement trois distributions à considérer ici, ceux de type EB, E et TNB. Pour chacune des distributions il y a deux cas possibles correspondant à l’abandon des appels en attente ou non *($\Theta>0$ ou $\Theta=0$)*. La supposition $\Theta>0$ fait croître le réalisme du modèle mais la croit également la complexité des formules.

Puisque la distribution du type TNB n’a pas encore été utilisée en théorie, seulement EB et E seront décrites en détail.

Pour les systèmes avec perte (TFL) on examine un paramètre du trafic dans le temps, pour tous les différents cas de base (EB, E etc.). Ici on le trouve approprié de faire l’opposé, examiner un cas dans le temps, pour tous les différents paramètres du trafic.

3. Nombre limité de sources : système avec attente type d’Engset



La supposition de (TFD 1.3) + (TFD 1.4) + (TFD 1.6EB) donne

$$\left.\begin{array}{lr}
0\le p\le N & \\
N>n & \\
\mu_p = \dfrac{p}{s} & pour\;\; 0\le p\le n \\
\mu_p = \dfrac{n}{s}+\dfrac{\Theta}{s}\cdot(p-n) & pour\;\; n<p\le N \\
\lambda_p = y(p)\cdot W(p) & \\
y(p) = (N-p)\cdot\beta & \\
W(p)=1 & pour\;\; 0\le p\le N
\end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 3.1)}$$

$\Theta = 0$: tous les appels attendent jusqu’à ce qu’ils soient servis

$\Theta > 0$: les appels en attente abandonnent l’attente avec l’intensité $\dfrac{\Theta}{s}$

De

$$\lambda_{p-1} \cdot [p-1] = \mu_p \cdot [p] \qquad \text{(TGD 1.11)}$$

on obtient pour la supposition (TFD 1.4) + (TFD 1.6EB):

$$[p] = \binom{N}{p} \cdot \alpha^p \cdot [0] \qquad 0 \le p \le n$$

$$[p] = \frac{p!}{n! \cdot \pi} \cdot \binom{N}{p} \cdot \alpha^p \cdot [0] \qquad n \le p \le N$$

$$\pi = \prod_{v=1}^{p-n} (n + v \cdot \Theta) \qquad \text{(TFD 3.2)}$$

$$\sum_{p=0}^{N} [p] = 1$$

DISTRIBUTION DE SYSTEME AVEC ATTENTE DE TYPE D'ENGSET

$$\alpha = \beta \cdot s \qquad (N > n)$$

$$(\Theta \ge 0)$$

Pour $\Theta = 0$ (TFD 3.2) est réduit à

$$[p] = \binom{N}{p} \cdot \alpha^p \cdot [0] \qquad 0 \le p \le n$$

$$[p] = \frac{p!}{n! \cdot n^{p-n}} \cdot \binom{N}{p} \cdot \alpha^p \cdot [0] \qquad n < p \le N$$

$$\sum_{p=0}^{N} [p] = 1 \qquad \text{(TFD 3.3)}$$

$$\alpha = \beta \cdot s$$

$$\Theta = 0$$

<u>Congestion de temps</u>

Pour (TFD 3.2) et (TFD 3.3) on a

$$E = \sum_{p=n}^{N} [p] \qquad \text{(TFD 3.4)}$$

<u>Congestion d'appels</u>

Pour (TFD 3.2) et (TFD 3.3) la congestion d'appel est égale à la probabilité qu'un appel devrait attendre:

$$B = (P > 0) = \frac{\sum_{p=n}^{N} (N-p) \cdot \beta \cdot [p]}{\sum_{p=0}^{N} (N-p) \cdot \beta \cdot [p]}$$

$$B = \frac{\sum_{p=n}^{N} (N-p)\cdot [p]}{\sum_{p=0}^{N} (N-p)\cdot [p]} \qquad \text{(TFD 3.5)}$$

qui pourrait être écrite

$$B = \frac{(N-n)\cdot \Theta \cdot E + n\cdot (E-[n])}{\frac{\Theta+\beta}{1+\beta}\cdot N\cdot (1-E) + (N-n)\cdot \Theta \cdot E + n\cdot (E-[n])} \qquad \text{(TFD 3.5a)}$$

Pour $\Theta = 0$, B est réduite à

$$B = \frac{n\cdot (E-[n])}{\frac{N\cdot \alpha \cdot (1-E)}{1+\alpha} + n\cdot (E-[n])} \qquad \text{(TFD 3.6)}$$

Pour $\Theta = 1$

$$B = \frac{N\cdot E + n\cdot [n]}{N - n\cdot [n]} = \frac{E - \frac{n}{N}\cdot [n]}{1 - \frac{n}{N}\cdot [n]} \qquad \text{(TFD 3.7)}$$

Noter que le cas $\Theta = 1$ donne

$$\left.\begin{aligned} [p] &= \binom{N}{p}\cdot b^{p}\cdot (1-b)^{N-p} \\ b &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ \Theta &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 3.8)}$$

Si $p = n$, on obtient

$$[n] = \binom{N}{n}\cdot b^{n}\cdot (1-b)^{N-n}$$

(TFD 3.8)) est identique à la distribution de Bernoulli (TFL 2.1B) pour un système avec perte. L'état *[p]*, cependant, ici signifie n occupations et $p - n$ appels en attente pour $p > n$.

La proportion espérée des appels qui abandonnent est calculée comme suit

$$B_{gu} = \frac{\sum_{p=n+1}^{N} [p]\cdot \frac{\Theta}{s}\cdot (p-n)}{\sum_{p=0}^{N} [p]\cdot (N-p)\cdot \beta} = \frac{\Theta}{\alpha}\cdot \frac{\sum_{p=n+1}^{N} [p]\cdot (p-n)}{\sum_{p=0}^{N} [p]\cdot (N-p)} \qquad \text{(TFD 3.9)}$$

qui peut être écrit

$$B_{gu} = \frac{\Theta}{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot \frac{(N\alpha - n\cdot (1+\alpha))\cdot E + n\cdot [n]}{N\cdot (\Theta+\alpha) + (N\alpha - n\cdot (1+\alpha))\cdot (\Theta-1)\cdot E + (\Theta-1)\cdot n\cdot [n]} \qquad \text{(TFD 3.9a)}$$

Pour $\Theta = 0$, $B_{gu} = 0$, qui devrait être correcte comme $\Theta = 0$ implique qu'il n'y a pas d'appel qui abandonne.

Pour $\Theta = 1$:

$$B_{gu} = E \cdot \left(1 - \frac{n}{N} \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha} \right) + \frac{n \cdot [n]}{N \cdot \alpha} \qquad \text{(TFD 3.9b)}$$

L'effet de Θ pourrait être illustré par l'exemple numérique suivant:

Considérant un groupe avec $N = 10$ sources, $n = 4$ circuits et $\alpha = 0.5$. Pour les différentes valeurs de Θ on obtient les valeurs numériques suivantes sur les caractéristiques:

Caractéristique	$\Theta = 0$	$\Theta = 1$	$\Theta = 2$	$\Theta = \infty$
E	0.511	0.441	0.408	0.289
B	0.397	0.350	0.326	0.240
B_{gu}	0	0.094	0.131	0.240
Q	0.571	0.313	0.223	0
A^1	3.143	3.020	2.962	2.755
A	3.143	3.333	3.408	3.623
$\frac{A - A^1}{A}$	0	0.094	0.131	0.240
$\frac{B_{gu}}{B}$	0	0.269	0.400	1.000

4. Nombre de sources infini. Système avec attente de type Erlang (Erlang II)

N n

$N = \infty$ n fini

$0 \leq p \leq \infty$

La supposition (TFD 1.1) + (TFD 1.6E) donne:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq p \leq \infty & \\ N = \infty & \\ n \ fini & \\ \mu_p = \frac{p}{s} & 0 \leq p \leq n \\ \mu_p = \frac{n}{s} + \frac{\Theta}{s} \cdot (p - n) & n \leq p \leq \infty \\ \lambda_p = y(p) \cdot W(p) & \\ y(p) = y & \\ W(p) = 1 \quad pour\ tous\ p & \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 4.1)}$$

$\Theta = 0$ signifie que tous les appels attendent jusqu'à ce qu'ils soient servis

$\Theta > 0$ signifie que les appels avec attente abandonnent avec l'intensité $\frac{\Theta}{s}$

Utilisant $\mu_p \cdot [p] = \lambda_{p-1} \cdot [p-1]$ (TGD 1.11) et appliquant la supposition (TFD 4.1), on obtient

$$\boxed{\begin{array}{ll} [p] = \dfrac{A^p}{p!} \cdot [0] & 0 \le p \le n \\ [p] = \dfrac{A^{p-n}}{\prod\limits_{\nu=1}^{p-n} (n + \nu \cdot \Theta)} \cdot \dfrac{A^n}{n!} \cdot [0] & n < p \le \infty \\ \sum\limits_{p=0}^{\infty} [p] = 1 & \\ A = y \cdot s \qquad \Theta \ge 0 & \end{array}} \qquad \text{(TFD 4.2)}$$

Pour $\Theta = 0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} [p] = \dfrac{A^p}{p!} \cdot [0] & 0 \le p \le n \\ [p] = \left(\dfrac{A}{n}\right)^{p-n} \cdot \dfrac{A^n}{n!} \cdot [0] & n \le p \le \infty \\ \sum\limits_{p=0}^{\infty} [p] = 1 & \\ A = y \cdot s < n \qquad \Theta = 0 & \\ \textit{Distribution d' Erlang pour le système avec ATTENTE} & \end{array}} \qquad \text{(TFD 4.3)}$$

<u>Noter</u> - (TFD 4.3) nécessite que $A < n$ pour satisfaire la condition de convergence (TGD 3.18).

<u>Congestion de temps</u>

$$E = \sum_{p=n}^{\infty} [p]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Pour } \Theta = 0 \\ E = \dfrac{\dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}}{\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \dfrac{A^\nu}{\nu!} + \dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}} = D_n(A) \\ \textit{qui est la seconde formule d' Erlang} \end{array}} \qquad \text{(TFD 4.4)}$$

Pour $\Theta > 0$ l'expression est plus compliquée mais complètement calculable.

Pour le cas spécial $\Theta = 1$, on obtient

$$[p] = \frac{A^p}{p!} \cdot e^{-A} \qquad 0 \le p \le \infty$$

et

$$E = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \cdot e^{-A} \qquad \text{(TFD 4.5)}$$

Le cas $\Theta = 1$ est identique à la distribution de poisson pour un groupe à accessibilité totale dans un système avec perte (comparer la section TFL). L'état *(p)*, cependant, signifie ici *n* occupation et $p - n$ appels en attente quand $p > n$.

Congestion d'appel

Selon (TFD 2.2),

$$B = P(>0) = \frac{\sum_{p=n}^{\infty} y[p]}{\sum_{p=0}^{\infty} y[p]} = \sum_{p=n}^{\infty} [p] = E$$

c à d $\boxed{B = E}$ (TFD 4.6)

comme $y\,(p) = y$ est indépendant de l'état du système, (p). (Nombre infini de sources).

Pour $\Theta > 0$ la portion des appels qui abandonnent est calculée comme

$$B_{gu} = \frac{\sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \cdot \frac{\Theta}{s} \cdot (p-n)}{\sum_{p=0}^{\infty} [p] \cdot y} = \frac{\Theta}{A} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \cdot (p-n) \qquad \text{(TFD 4.7)}$$

$$A = y \cdot s$$

De

$$(n + \Theta(p-n)) \cdot [p] = A \cdot [p-1]$$

ou

$$(p-n) \cdot [p] = \frac{A}{\Theta} \cdot [p-1] - \frac{n}{\Theta} \cdot [p]$$

et

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} (p-n) \cdot [p] = \frac{A}{\Theta} \cdot \sum_{p=n}^{\infty} [p] - \frac{n}{\Theta} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \qquad \text{(TFD 4.8)}$$

on obtient

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} (p-n) \cdot [p] = \frac{1}{\Theta} \cdot \left(A \cdot E - n \cdot E + n \cdot [n] \right)$$

alors que (TFD 4.7) peut être écrit

$$B_{gu} = \frac{n}{A} \cdot [n] + \frac{A-n}{A} \cdot E \qquad \text{(TFD 4.7a)}$$

où $[n]$ et E dépendent de Θ.

Pour $\Theta = 1$

$$B_{gu} = \frac{A^n}{n!} \cdot e^{-A} - \frac{n-A}{A} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \cdot e^{-A} \qquad \text{(TFD 4.9)}$$

Dans (TFD 4.7a) et (TFD 4.8) A peut être $< n$ ou $> n$.

Trafic écoulé et trafic offert

Selon (TFD 2.3), le trafic écoulé est

$$A^1 = \sum_{p=1}^{n-1} p \cdot [p] + \sum_{p=n}^{\infty} n \cdot [p] = A \cdot \sum_{p=1}^{n-1} [p-1] + n \cdot \sum_{p=n}^{\infty} [p]$$

$$A^1 = A \cdot \left(1 - \sum_{p=n+1}^{\infty} [p] \right) + n \cdot E \qquad (A = y \cdot s)$$

$$A^1 = A \cdot (1 - [n-1] - E) + n \cdot E$$

$$A^1 = A + (n-A) \cdot E - n \cdot [n] \qquad \text{(TFD 4.10)}$$

On note aussi que

$$A \cdot (1 - B_{gu}) = A + (n-A) \cdot E - n \cdot [n]$$

Pour le trafic offert ,selon (TFD 2.4)

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} s \cdot y[p] = s \cdot y \qquad \text{(TFD 4.11)}$$

La différence entre A et A^1 est

$$\Delta A = A - A^1 = n \cdot [n] - (n-A) \cdot E \qquad \text{(TFD 4.12)}$$

Pour $\Theta = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} E = D_n(A) = \dfrac{\dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}}{\sum_{v=0}^{n-1} \dfrac{A}{v!} + \dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A}} = \dfrac{A^n}{n!} \cdot \dfrac{n}{n-A} \cdot [0] \\ [n] = \dfrac{A^n}{n!} \cdot [0] \qquad D_n(A) = \text{La seconde formule d' Erlang !} \end{array}} \qquad \text{(TFD 4.4a)}$$

Par conséquent

$$\frac{n}{n-A} \cdot [n] = E$$

ou

$$n \cdot [n] = (n-A) \cdot E$$

à partir duquel il suit que

$$\begin{aligned} \Delta A &= 0 \\ A &= A^1 \\ \Theta &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(TFD 4.13)}$$

Pour $\Theta > 0$, en d'autre terme,

$$A > A^1 \qquad \text{(TFD 4.14)}$$

Selon (TFD 2.6) et (TFD 4.9) la longueur moyenne de la queue = le nombre moyen d'appels en attente dans le système.

$$\left.\begin{array}{l} Q = \sum_{p=n+1}^{\infty} (p-n)\cdot[p] = \frac{1}{\Theta}\cdot\left(n\cdot[n]-(n-A)\cdot E\right) \\ \Theta > 0 \end{array}\right\} \quad \text{(TFD 4.15)}$$

Pour $\Theta = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Q = \frac{A}{n-A}\cdot D_n(A) \\ \Theta = 0 \\ A < n \end{array}\right\} \quad \text{(TFD 4.16)}$$

Probabilité pour que x circuits spécifiés sont engagés

Pour une recherche aléatoire et $\Theta = 0$, on obtient, selon (TDG 3.11)
(après quelques réarrangements)

$$\left.\begin{array}{l} H(x) = \frac{n-A}{n}\cdot D_n(A)\cdot\left(\frac{1}{E_{n-x}(A)}+\frac{A}{n-A}\right) \\ \Theta = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(TFD 4.17)}$$

où $E_n(A)$ est la première formule d'Erlang (TFL 3.1E). La relation entre $D_n(A)$ et $E_n(A)$ peut être écrite:

$$\begin{array}{l} D_n(A) = \frac{n\cdot E_n(A)}{n-A\cdot\left(1-E_n(A)\right)} \\ (A < n) \end{array} \quad \text{(TFD 4.18)}$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} E_n(A) = \frac{(n-A)\cdot D_n(A)}{n-A\cdot D_n(A)} \\ A < n \qquad \Theta = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(TFD 4.18a)}$$

Charge dans le *v:*ème circuit

Comme $N = \infty$, la charge dans le *v:*ème circuit dans un groupe à accessibilité totale avec recherchée sequentiellement peut être calculée comme

$$\begin{array}{l} a_v = b_v + (1-b_v)\cdot\frac{A}{n}\cdot D_n(A) \\ b_v = A\cdot\left(E_{v-1}(A)-E_v(A)\right) \\ \Theta = 0 \end{array} \quad \text{(TFD 4.19)}$$

Pour la recherche aléatoire

$$\left.\begin{array}{l} a_v = \frac{A'}{n} = \frac{A}{n}+\frac{n-A}{n}\cdot E-[n] \\ \Theta > 0 \end{array}\right\} \quad \text{(TFD 4.20)}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} a_v = \frac{A}{n} \\ \Theta = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(TFD 4.20a)}$$

L'effet des différentes valeurs de Θ peut être illustré par l'exemple numérique qui suit pour $N = 4$, $A = 3$:

Caractéristique	$\Theta = 0$	$\Theta = 1$	$\Theta = 2$	$\Theta = \infty$
$E = B$	0.509	0.353	0.314	0.206
B_{gu}	0	0.107	0.133	0.206
Q	1.528	0.319	0.199	0
A^1	3	2.681	2.601	2.382
A	3	3	3	3
$\frac{A - A^1}{A}$	0	0.107	0.133	0.206
$\frac{B_{gu}}{B}$	0	0.302	0.424	1.000

5. Distribution du temps d'attente

Le temps d'attente moyen *(U)* est toujours indépendant de la discipline de la queue, alors que la distribution du temps *f(t)* est très dépendant de lui. Il n'y a pas de méthode générale pour la dérivée de U et $f(t)$ et leurs expressions ne sont pas des expressions simples et explicites.

Les cas les plus simples sont obtenus avec l'ordre de la queue, la plus simple est la distribution du temps d'attente d'Erlang (TFD 4.3). On devrait se limiter au raconte de cas.

Pour (TFD 4.3) le temps moyen d'attente pour les appels en attente est

$$u = \frac{s}{n - A} \qquad \text{(TFD 5.1)}$$

et pour tous les appels

$$U = P(>0) \cdot u = D_n(A) \cdot \frac{s}{n - A} \qquad \text{(TFD 5.2)}$$
$$\Theta = 0$$

La distribution du temps d'attente pour les appels en attente devraient être selon (TFD 2.11)

$$P_v(> t_0) = e^{-\frac{n-A}{s} \cdot t_0} \qquad \text{(TFD 5.3)}$$

et pour tous les appels

$$\left.\begin{aligned} P(\tau = 0) &= 1 - D_n(A) \\ P(\tau > t_0) &= D_n(A) \cdot e^{-\frac{n-A}{s} \cdot t_0} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TFD 5.4)}$$

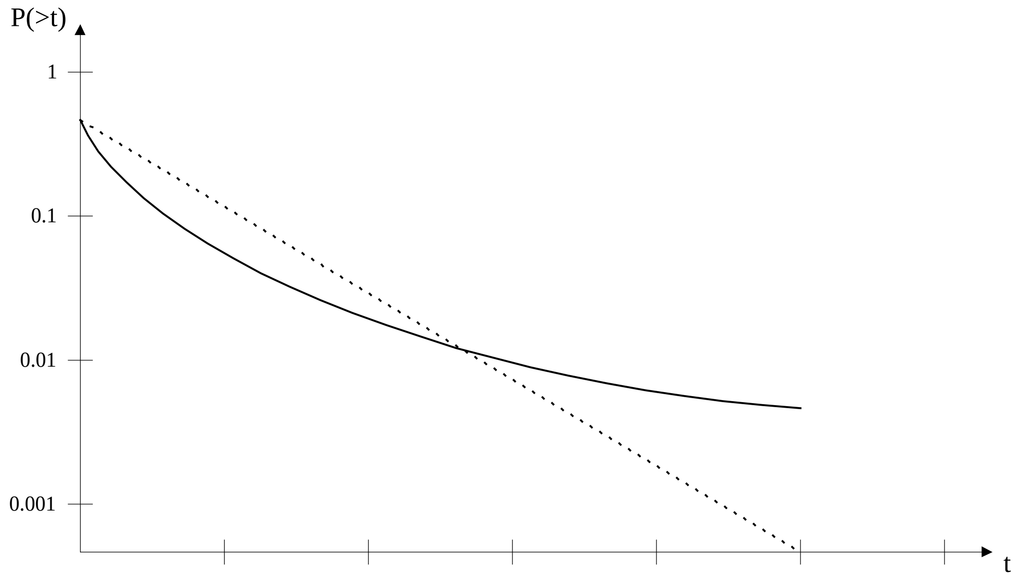


FIGURE TFD 5/1

Distribution du temps d’attente pour tous les appels,
pour une queue ordonnée (pointillé) et pour une queue aléatoirement servie.
Les deux cas ont la même valeur moyenne.
Aucun appel en attente n’abandonne l’attente ($\Theta = 0$).

6. <u>Système avec attente avec un temps moyen de prise constant : distribution de Crommelin</u>

Pour les cas avec temps moyen de prise constant, la supposition faite dans la section TGD n’est pas appliquée. Pour dériver les cas de ce type, on peut utiliser les équations d’état de Fry.

Les équations d’état de Fry. Concept.

Supposons un équilibre et considérons le système aux points de temps t et $t + h$, où h est le temps moyen de prise

Les occupations qui sont en augmentation au temps t sont toutes achevées au temps $t + h$, au temps $t + h$ il y a seulement les appels qui ont été dans la queue au temps t et les nouveaux appels.

$$[p]_{t+h} = \sum_{v=0}^{n} [v]_t \cdot P(p,h) + \sum_{v=n+1}^{n+p} [v]_t \cdot P(p-v+n,h) \qquad \text{(TFD 6.1)}$$

$P(p,h)$ = probabilité qu’exactement p appels arrivent durant l’intervalle $(t,\ t + h)$.

Pour $N = \infty$, $\Theta = 0$ et une queue ordonnée, la distribution de Crommelin est déterminée.

Pour $n = 1$ le temps moyen pour tous les appels est

$$U = \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{1-a} \qquad \text{(TFD 6.2)}$$

a = trafic offert = trafic écoulé < 1.

Pour $n > 1$ la solution exacte devrait être plus compliquée. On peut, cependant, utiliser une modification de l’expression approximative de Molina:

$$U \cong \frac{h}{n+1} \cdot \frac{D_n(A)}{1-a} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a^n} \cdot \frac{1}{1+a}$$

$$a = \frac{A}{n} < 1 \qquad n \geq 1 \qquad \text{(TFD 6.3)}$$

<u>Noter</u> que (TFD 6.2), pour le temps moyen de prise, donne exactement la moitié du temps d'attente obtenu pour le temps de maintien exponentiellement distribué avec le même temps moyen de prise. L'expression (TFD 5.2) donne pour

$$n = 1 \quad A = a \quad s = h$$

$$U = h \cdot \frac{a}{1-a} \qquad \text{(TFD 6.4)}$$

(distribution exponentielle)

Pour $n = 1$

$$U_{const} = \frac{1}{2} \cdot U_{exp} \qquad \text{(TFD 6.5)}$$

et pour un n arbitraire selon (TFD 6.3) et (TFD 5.2):

$$U_{const} = U_{exp} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a^n} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \text{(TFD 6.6)}$$

c à d

$$U_{const} < U_{exp}$$

La distribution du temps d'attente pour le cas de Crommelin peut être écrit:

$$\left.\begin{array}{l} P(t = 0) = 1 - D_n(A) \\ P(t > t_0) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{n-1} P_v \cdot \frac{(A \cdot B)^x}{x!} \cdot e^{-A \cdot B} \end{array}\right\} \qquad \text{(TFD 6.7)}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} B = \mu - \left(\dfrac{t_0}{h} - \left\{\dfrac{t_0}{h}\right\}\right) \\ x = \left(\mu + \left\{\dfrac{t_0}{h}\right\}\right) \cdot n + n - 1 - v \\ P_v = \displaystyle\sum_{p=0}^{v} [p] \\ \left\{\dfrac{t_0}{h}\right\} = \text{la partie entière de } \dfrac{t_0}{h} \\ A = \text{trafic offert} < n \end{array}\right.$$

La probabilité $P(t>t_0)$ pour des temps d'attente très long devrait être inférieur pour (TFD 6.7) que pour (TFD 5.4).

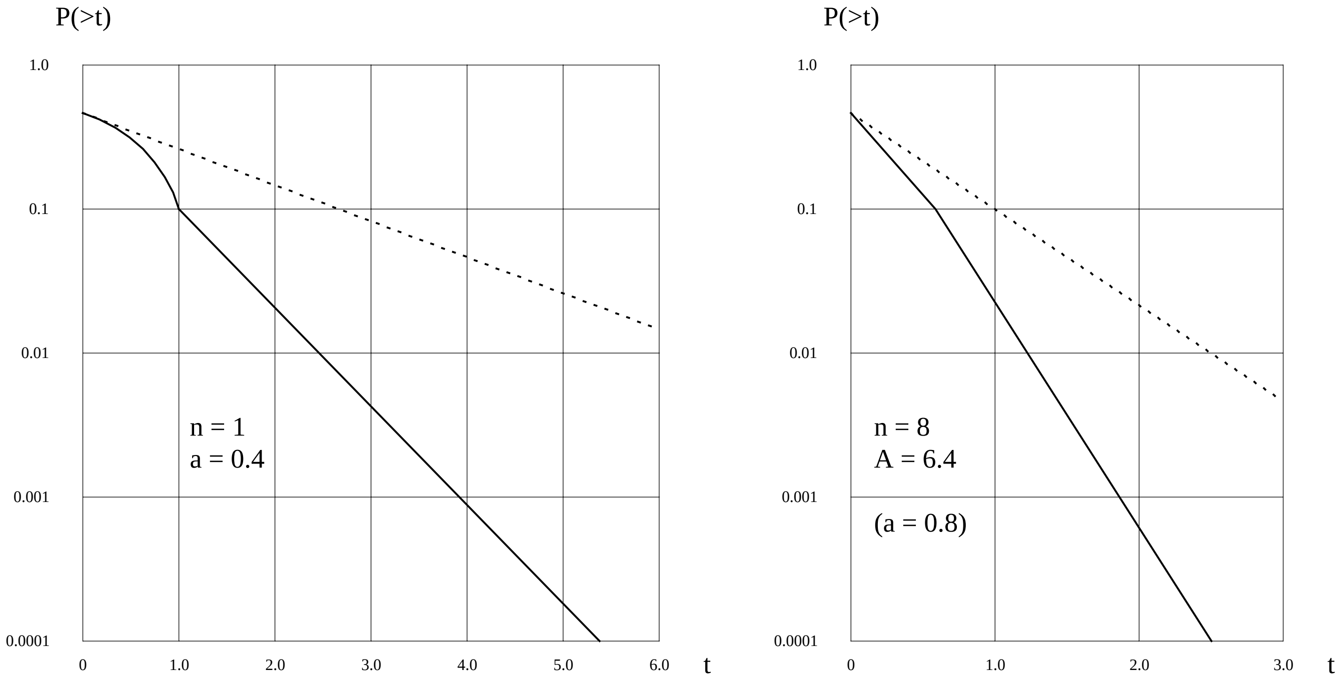


FIGURE TFD 6/1 : Distribution de temps pour tous les appels pour le temps de prise exponentiellement distribué (pointillé) et pour le temps de prise constant.
Nombre de sources infini et queue ordonnée; pas d'appels qui abandonnent *(θ = 0)*.
Le temps *t* est exprimé en multiple de temps de prise constant.

7. Distribution composite du temps de maintien

Dans quelques cas pratiques les distributions de temps de maintien sont ni constantes ni exponentiellement distribuées. Il y a souvent une composition des temps de maintien constant. Souvent, aussi, quelques uns de ces temps de maintien sont prolongés par la nécessité d'attendre pour autres circuits. Ce temps d'attente peut souvent avoir le caractère d'une expression approximative.

Si on détermine te temps de prise réel avec sa moyenne h et variance σ^2, on peut souvent espérer que, dans les cas pratiques, les valeurs de σ / h devrait être entre les valeurs correspondantes pour les cas avec le temps d'attente constant et exponentielle pour tous les appels ($\theta = 0$).

Nombre de sources infini ($N = \infty$)

$$U \approx \left(1 - \frac{\sigma^2}{\overline{h}^2} \right) \cdot U_{const} + \frac{\sigma^2}{\overline{h}^2} \cdot U_{exp} \qquad \text{(TFD 7.1)}$$

où

$\overline{h} = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t)\,dt$ est le temps moyen de maintien

$\sigma^2 = \int_{t=0}^{\infty} (t - \overline{h})^2 \cdot f(t)\,dt$ est la variance

U_{const} de (TFD 6.3) (Molina modifié)

U_{exp} de (TFD 5.2) (Erlang)

$\overline{h}$ et σ^2 à partir de la distribution du temps de maintien

Pour le temps de maintien constant on obtient $\sigma^2 = 0$ et $U = U_{const}$.

Pour la distribution d'un temps de maintien exponentiel on a $\sigma^2 = \overline{h}^2$ et $U = U_{exp}$.

U est non affecté par la discipline de la queue.

Nombre fini de sources

Avec le nombre fini de sources, les temps d'attente sont limités comme comparé avec $N = \infty$. Une méthode approximative pour prendre cet effet en compte, avec la distribution composite du temps de maintien et un nombre fini de sources, est d'utiliser les formules suivantes pour le temps moyen d'attente pour tous les appels:

$$U(n,N) = \left\{ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\overline{h}^2} \right) \cdot U_{const} + \frac{\sigma^2}{\overline{h}^2} \cdot U_{exp} \right\} \cdot \left(1 - \frac{n}{N} \right) \qquad \text{(TFD 7.2)}$$

où

$$\begin{cases} U_{const} \text{ de (TFD 6.3) (Molina modifié)} \\ U_{exp} \text{ de (TFD 5.2) (Erlang)} \\ \overline{h} \text{ et } \sigma^2 \text{ de la distribution du temps de maintien} \end{cases}$$

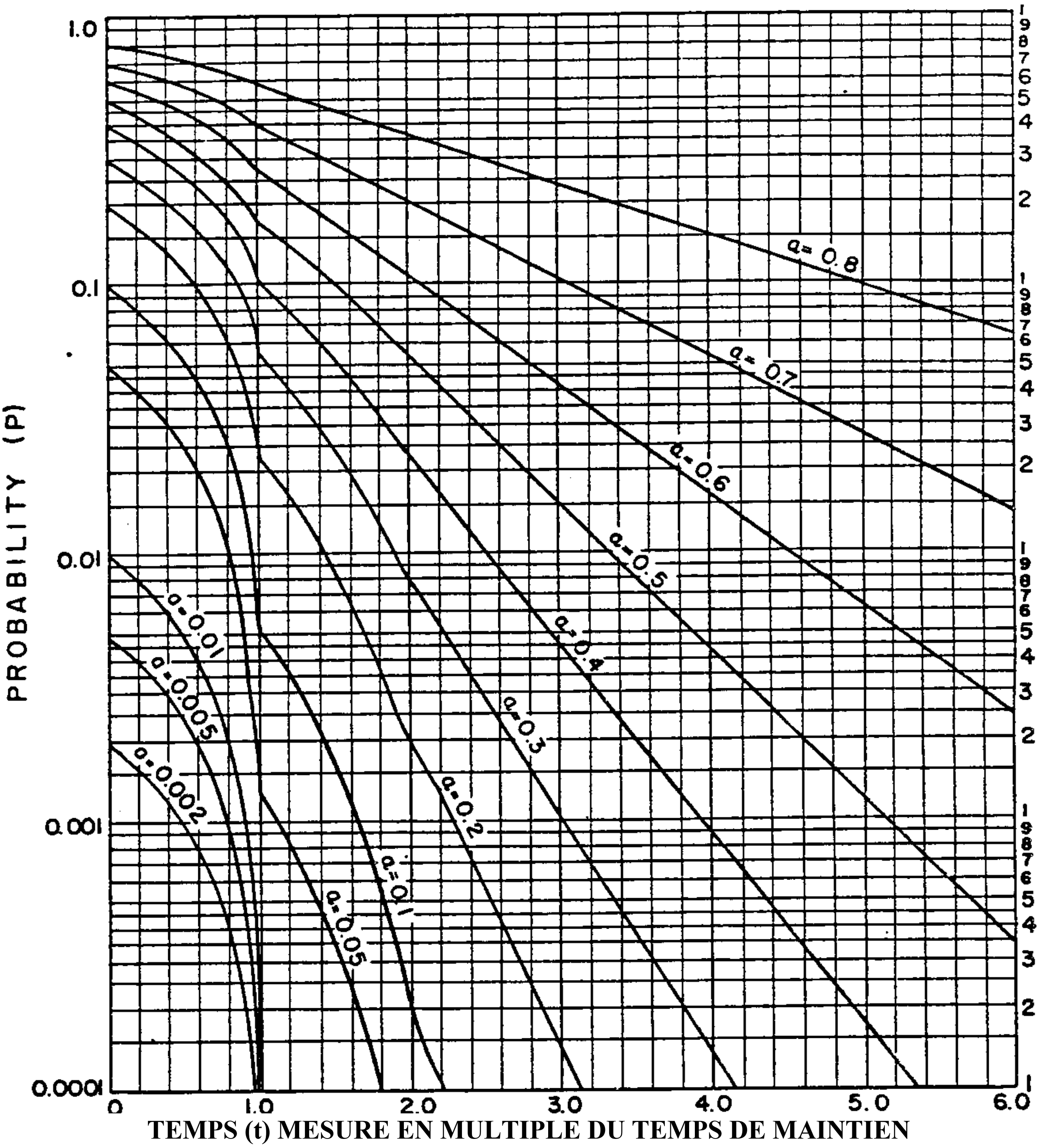
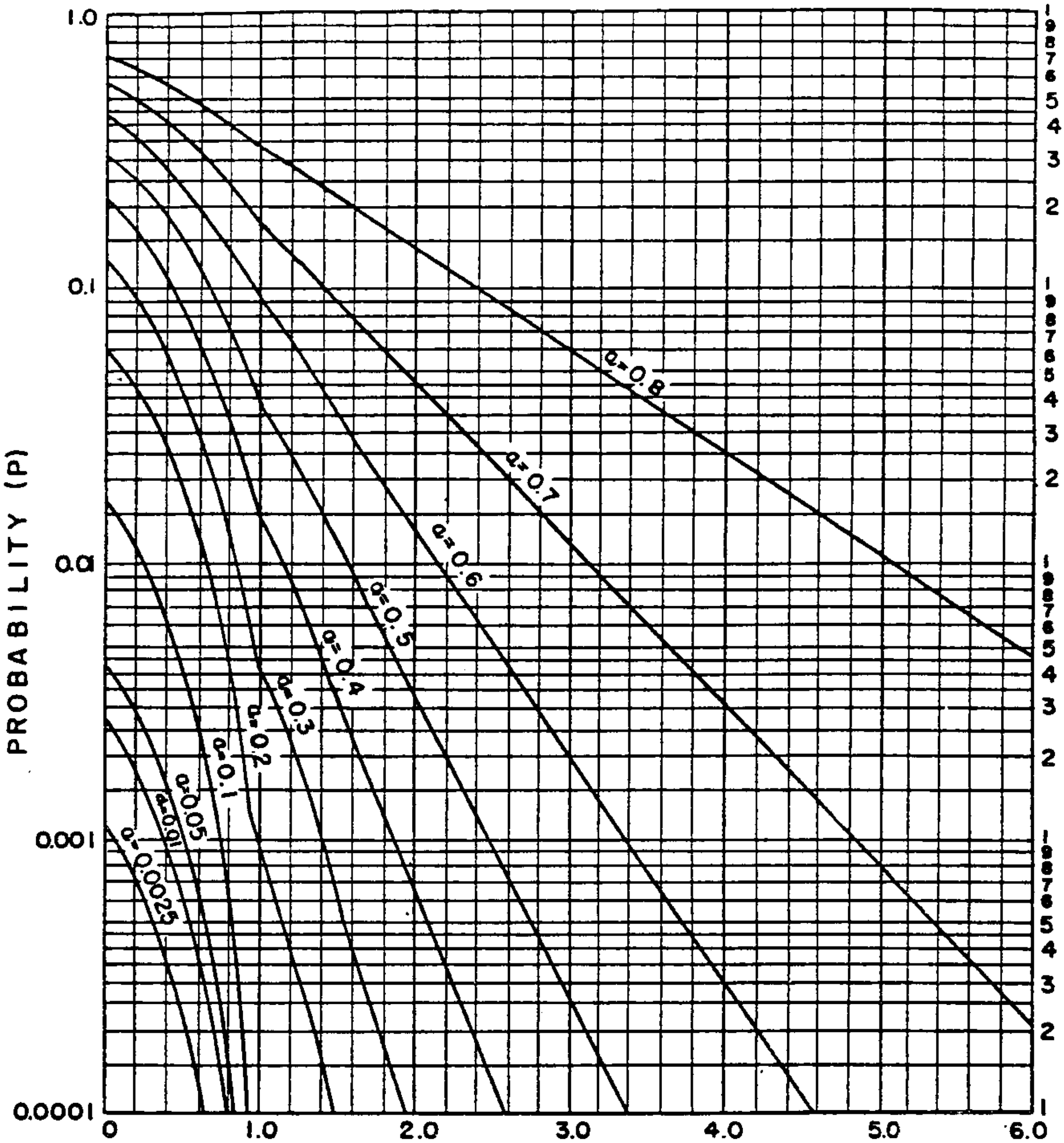


FIGURE A

Probabilité *P* pour une attente dépassant *t*

quand il y a *n = 1* commutateur avec occupation α



TEMPS (t) MESURE EN MULTIPLE DU TEMPS DE MAINTIEN

FIGURE B

Probabilité *P* pour une attente dépassant *t*

quand il y a *n = 2* commutateurs avec occupation α

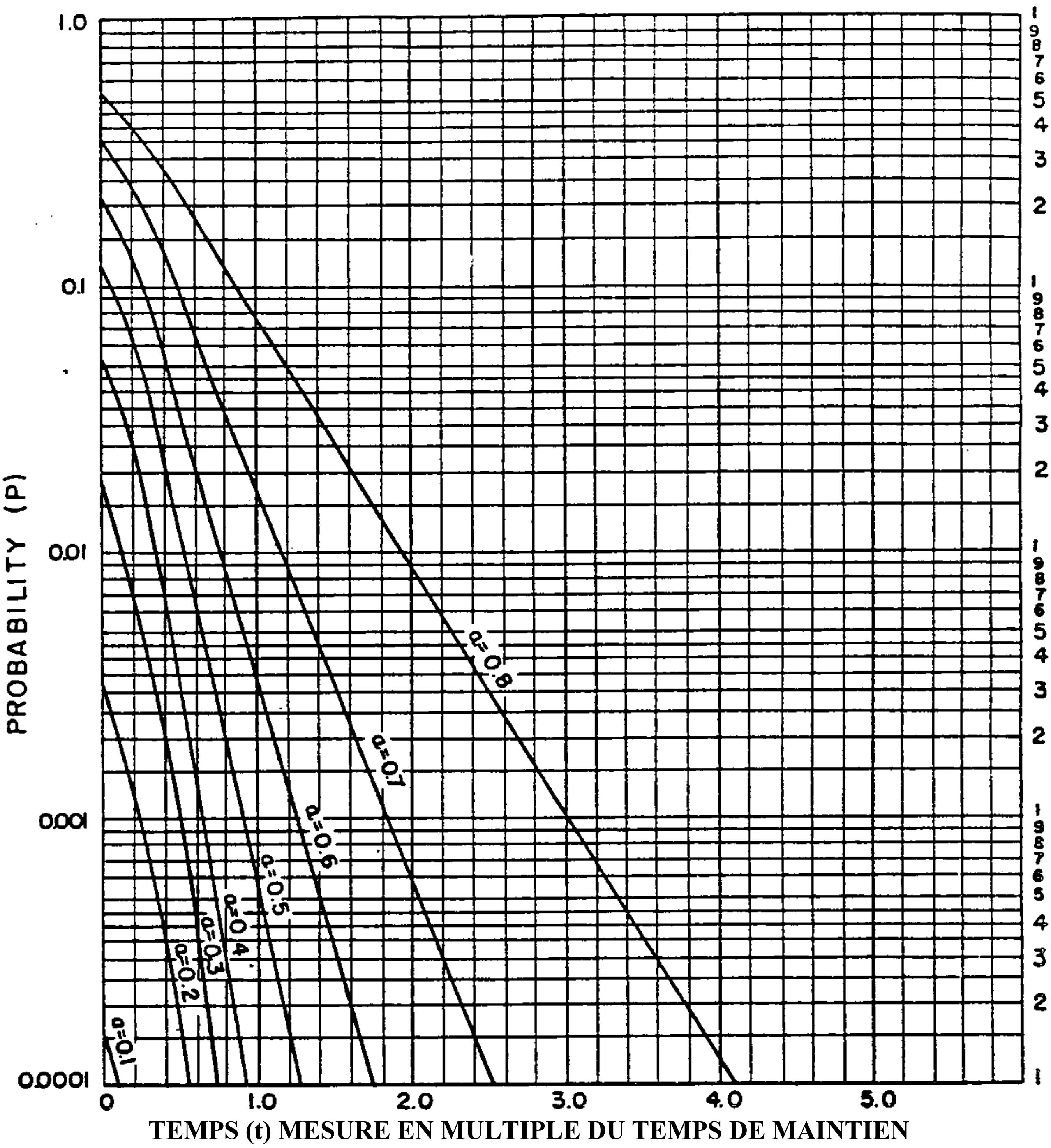


FIGURE C

Probabilité *P* pour une attente dépassant *t*

quand il y a *n = 5* commutateurs avec occupation α

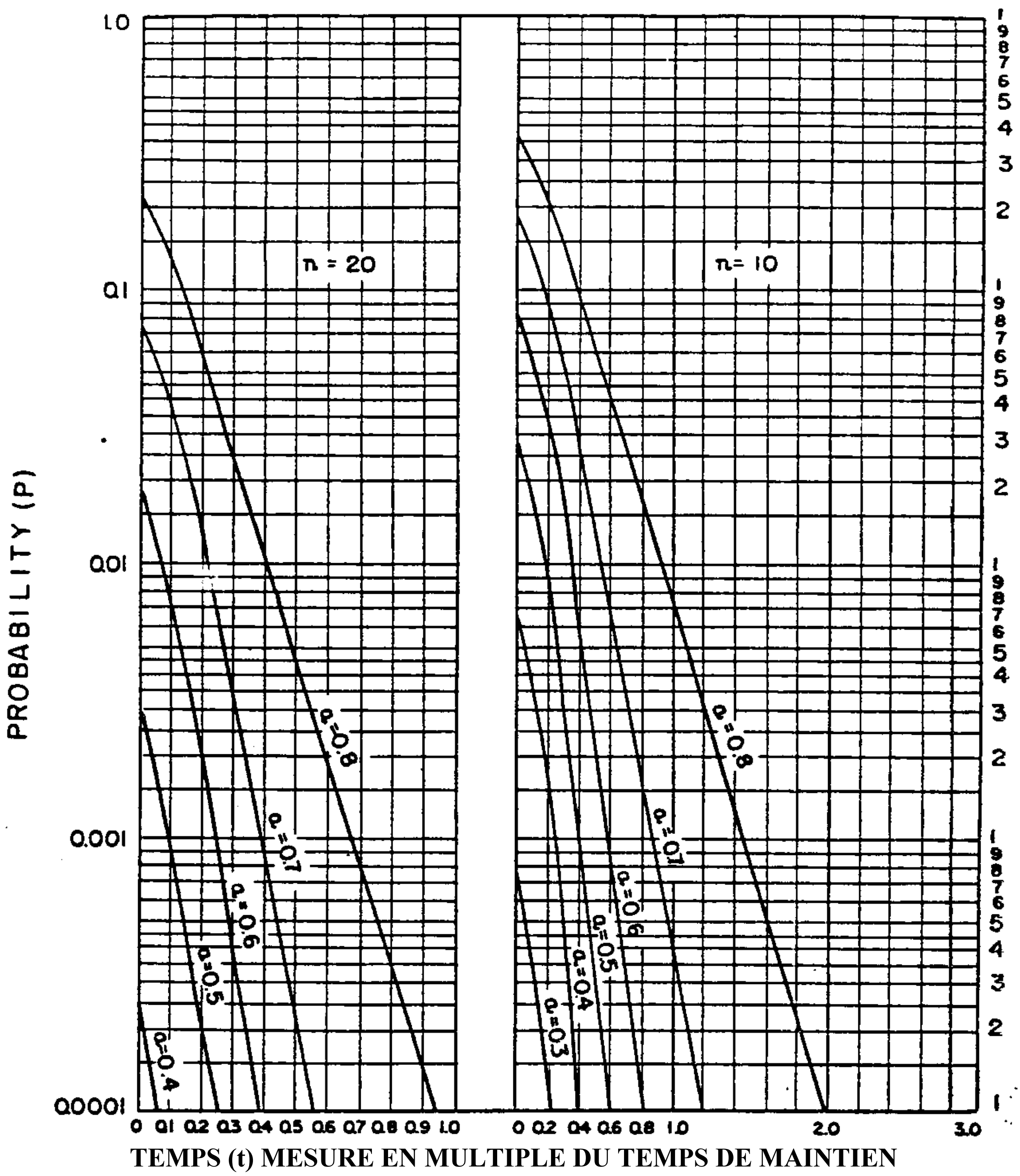


FIGURE D

Probabilité *P* pour une attente dépassant *t*

quand il y a *n = 10* et *n = 20* commutateurs avec occupation α

FIGURE TFD 7/1

DISTRIBUTION DE CROMMELIN. GRAPHIQUES MONTRANT
LA PROBABILITE D'ATTENDRE PLUS D'UN TEMPS DONNE. CE TEMPS DEVIENT
EXPRIME EN MULTIPLE DE TEMPS DE MAINTIEN CONSTANT

Distribution du temps d'attente

Les expressions de la distribution du temps d'attente pour un temps de maintien composite sont souvent très compliquées. La discipline de la queue, en plus, a une grande signification. La probabilité des plus courts et plus longs temps d'attente est plus grand avec une probabilité qu'avec une queue ordonné.

Avec une queue prioritaire, le résultat est réellement le même comme dans les cas avec un nombre fini de sources où le nombre de sources = la priorité.

8. Commentaires généraux; notations de Kendall

Durant la dernière décennie plusieurs études théoriques ont été faites sur les systèmes avec attente. Ces études, qui utilisent différentes combinaisons de suppositions concernant les entrées, temps de service et la discipline de la queue, sont principalement traitées avec la description des cas d'attente en dehors du domaine des télécommunications. Il est estimé qu'il y a au moins 1000 articles et 100 documents traitant les problèmes des fils d'attente, et qui sont disponibles dans les librairies aujourd'hui. Il est tout à fait claire que cette vague d'intérêt des problèmes des files d'attente ont été bénéfiques et fructueuses pour le traitement des problèmes d'attente au sein du domaine des télécommunications. Cependant, la plus part des solutions présentées concerne plutôt les expressions mathématiques compliquées qui devraient être utilisés pour arriver au résultats pratiques. Cependant, les formules, connues pour longue temps, déduites par Erlang, Molina, Fry, Crommelin et autres sont toujours de valeur le plus grande quand ils deviennent aux calculs pratiques.

Quand les formules simples existantes ne pourraient pas donner des résultats pratiques exactes, l'ingénierie du trafic d'aujourd'hui préfère utiliser des simulations par ordinateur. Avec des conditions réelles sont correctement reflétées dans la supposition des programmes de simulation, cette méthode donne des résultats performants, qui pourraient être transférées à la conception et le dimensionnement des systèmes avec attente utilisés dans le matériel des télécommunications. Les simulations aussi recommandent quand on peu utiliser des formules approximatives simples et quand on ne peut pas les utiliser.

Dans le but de définir facilement l'utilisation des suppositions dans une étude avec système d'attente, D.G. Kendall avait introduit un système de notation qui par un code de lettres décrit la supposition pour

a) le processus d'entrée
b) le temps de maintien/temps de service
c) le nombre de serveurs
d) la discipline de la file d'attente.

Puisque ces notations, comme M/M1(FIFO) sont utilisées fréquemment dans la littérature, il y a donc une raison de les évoquer ici.

Cependant, une classification d'un système de queue

a/ b/ c/ (d)

Pour le processus d'entrée, *a*, les notations qui suivent sont utilisées:

M = Les intervalles distribués exponentiellement entre les appels, c à d, les entrées de poisson, (nombre infini de sources)

D = Entrées déterministiques, c à d les intervalles constant entre les appels;

G = Distribution générale pour les intervalles entre les appels;

GI = Intervalles généraux indépendants;

E_k = Les intervalles distribués en Erlang-k (où $E_1 \equiv M$).

Pour la distribution du temps de maintien, b), les mêmes lettres que pour a) sont utilisées, qui déterminent donc la distribution du temps de maintien.

Pour le nombre de serveur, c), la notation est souvent

1 pour un serveur,

n pour un nombre arbitraire de serveurs.

Pour la discipline de queue, d) les exemples de notations typiques sont:

FIFO: Premier Arrivé, Premier Servi (queue ordonnée)

RANDOM: Queue aléatoire.

Par conséquent, comme l'exemple du système de classification de Kendall, M/M/n (FIFO) définie la distribution d'Erlang pour les systèmes avec attente (définis en (TFD 4.3), (TFD 5.1) - (TFD 5.4)) comme un groupe à accessibilité totale avec un nombre arbitraire de circuits (n), et quand aucun appelant n'abandonne l'attente. De la même manière, M/D/n (FIFO) défini la distribution du temps d'attente de Crommelin pour des entrées de Poisson, temps de maintien constant et queue ordonnée comme décrit dans le chapitre TFD 3.

Le système de classification ne donne pas une image complète du système considéré, puisque les détailles qui suivent sont absents du point de vu théorie de télétrafic:

- nombre de sources individuelles de trafic générant le trafic d'entrée;
- groupement des arrangements autres que l'accessibilité totale, comme pour l'instant: grading, systems de linkage, etc.;
- les règles de recherche quand la recherche pour circuits libres a un impact sur le cas de trafic;
- les appels en attente attendent jusqu'à leur service, ou non.

Cette section est seulement traitée avec les groupes à accessibilité totale où il y a uniquement un étage possible d'attente, en dehors du groupe avant que les appels soient servis. Les techniques des télécommunications donnent, cependant, également plus d'équipements communs plus compliqués. Dans la procédure de l'établissement de l'appel, l'attente peut arriver dans différents étages de cette procédure, signifiant que le temps total d'établissement peut consister en la somme des temps de travail plus un nombre possible des temps d'attente. Ce type de système d'attente est appelé système composite avec attente et il est traité dans une autre section.

Théorie de base du télétrafic (T)

EXERCICES B

Groupe à accessibilité totale, système avec attente

Exercices de base

TXB 1

A un groupe à accessibilité totale dans un système avec attente constitué de 30 circuits est offert un trafic avec un taux d'appel 700 appels/heure et le temps moyen de prise est de 108 sec.

En supposant les hypothèses de la distribution d'Erlang pour les systèmes avec attente sont remplies, calculer

a) le trafic offert;
b) la probabilité d'attente;
c) le trafic écoulé;
d) le trafic moyen écoulé par circuit;
e) le temps moyen d'attente pour tous les appels;
f) le temps moyen d'attente pour les appels, qui doivent attendre.

TXB 2

Même suppositions et valeurs numériques comme dans l'exercice TXB 1. Supposer en plus que la queue est servie dans l'ordre des arrivées.

a) Calculer la probabilité pour qu'un appel devrait attendre plus que 3, 6, 12, 24, sec.;
b) Calculer la probabilité pour qu'un appel devrait attendre plus que 3, 6, 12, 24 sec., étant donné qu'il doit attendre.

TXB 3

Il est supposé que les appels arrivent à un circuit dans un système avec attente selon le processus de poisson avec un taux d'appel de 4,320 appels/heures.

Les temps de prises sont supposés être indépendants l'un de l'autre et du processus d'arriver. Il sont supposés suivre une distribution exponentielle avec le temps moyen de prise S sec.

Il est en plus supposé qu'il n'y a pas d'appels dans la queue qui abandonnent la queue, et que les appels dans la file sont servis selon l'ordre des arrivées.

Quelle est la plus grande valeur de S en sec. qui peut être autorisée pour accomplir la condition que la probabilité qu'un appel doit attendre plus que 3 sec. ne devrait pas être supérieure à 0.01?

TXB 4

Quel est le taux d'appel le plus grand qui peut être offert à un groupe à accessibilité totale de 2 circuits dans un système avec attente si le temps moyen d'attente pour tous les appels devrait être au plus 2 sec.?

Le temps moyen de prise est connu être 0.4 sec. et les suppositions de la distribution d'Erlang pour les systèmes avec attente sont supposés être accomplies.

TXB 5

Montrer que

$$E_{1n}(A) < E_{2n}(A)$$

TXB 6

Considérant un système d'Erlang avec attente, avec 10 circuits et un trafic offert de 8 erlang. Le temps moyen de conversation est 5 min. Les appels en attente sont servis en ordre d'arrivée. Quelle est la probabilité qu'un appel qui arrive trouve un autre appel dans la que qui attend plus que 0.5 min.?

TXB 7

Considérant un système d'erlang avec attente avec $n = 10$ circuits et $A = 4$ erl. Calculer la proportion du temps quand il y a au moins un appel en attente.

TXB 8

A un circuit dans un système avec attente, les appels arrivent selon un processus de poisson avec un taux d'appel de 4,320 appels/heure.

Les temps moyens sont des variables aléatoires indépendantes avec une et même distribution:

$$P\left\{\text{temps de prise} \;=\; 0.2\ sec.\right\} = \frac{1}{3}$$

$$P\left\{\text{temps de prise} \;=\; 0.4\ sec.\right\} = \frac{2}{3}$$

Les temps de prise et les temps d'inter-arrivées sont indépendants et pas d'appels dans la file qui quittent la queue.

a) Quelle est la probabilité d'attente ?
b) Quel est le temps moyen d'attente pour les appels qui doivent attendre ?
c) Quel est le temps moyen d'attente pour l'ensemble des appels ?

TXB 9

Un circuit dans un système avec attente est considéré.

Il est supposé que les appels arrivent selon le processus de poisson avec le taux d'appel 2,880 appels/heure.

Les temps de prise sont supposés être des variables aléatoires indépendantes avec une distribution donnée par la fonction de fréquence

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 16 \cdot t \cdot e^{-4 \cdot t} & (t > 0) \end{cases}$$

où t est mesurée en sec.

Les temps de prise et les temps d'inter-arrivées sont supposés être indépendants l'un de l'autre et il est en plus supposé qu'il n'y a pas d'appels dans la queue qui abandonnent l'attente.

a) Quelle est la probabilité d'attente ?
b) Quel est le temps moyen d'attente pour les appels qui devraient attendre ?
c) Quel est le temps moyen d'attente pour tous les appels ?