Descripción General de Tráfico

De TETRAPRO, editado por el Sr. H. Leijon, UIT

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

Teoría Básica de Teletráfico (T)

DESCRIPCION GENERAL DE TRAFICO (TGD)

Contenido

1. Teoría común para diferentes casos

   Supuestos básicos
   Fuentes individuales
   Distribución exponencial
   Probabilidades de estado, (P)
   Incrementar = disminuir, expresión general para (p)
   Aplicación en grupos de disponibilidad total, conexiones graduales (gradings) y sistemas de enlace (link system)

2. Aplicación en diferentes casos

   Terminación
   Incremento
   Significado de W(p)
   Intensidad de llamada, y(p)
   Distribuciones: BE, E y NB

3. Algunos conceptos generales y definiciones

   Congestión de tiempo
   Congestión de llamadas
   Tráfico cursado, A^1
   Tráfico ofrecido, A
   Diferencia entre A y A^1
   Carga en el dispositivo ν:ésimo
   Factor de mejora
   Probabilidad de x dispositivos específicos ocupados
   Duración del estado (p)
   Condición de convergencia

4 Ejemplo de un proceso de estado único en equilibrio.

   Deducción de probabilidades de estado
   Deducción clásica de la distribución Erlang

1. Teoría común para diferentes casos.

Para la descripción matemática de los procesos de tráfico se usan, en principio, los procesos estocásticos del tipo usualmente llamado “procesos de nacimiento y muerte”. Para llegar a resultados de utilidad práctica uno debe generalmente asumir que las intensidades de nacimiento y muerte son independientes del tiempo y tratar con el proceso cuando éste haya alcanzado el equilibrio.

Para efectos de ingeniería de tráfico telefónico, este proceso, “el proceso de tráfico”, describe el número de dispositivos ocupados o fuentes individuales como una función de tiempo. Esto nos lleva a las ecuaciones generales de estado de las cuales, en el límite, cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$, uno puede derivar las probabilidades de estado para el sistema. Se ha encontrado que de estas ecuaciones de equilibrio para las probabilidades de estado uno puede establecer expresiones abreviadas, las cuales cubrirán bien los casos más generales dentro de la teoría de tráfico. Allí es donde comenzaremos.

Hacemos los siguientes supuestos básicos:

(1) Equilibrio estadístico, el cual implica
INCREMENTO = DISMINUCION
a la larga ($t \rightarrow \infty$)

(2) Distribución de probabilidad para intervalos de tiempo entre llamadas sucesivas.

(3) Distribución de probabilidad para la duración de las ocupaciones individuales.

(TGD 1.1)

(4) La fuente de tráfico individual actúa independientemente del estado de otras fuentes.

(5) La duración de la ocupación individual es independiente de otras ocupaciones.

(6) Reglas determinísticas o distribuciones de probabilidad aplicadas a lo que sucede a las llamadas infructuosas.

La teoría será especialmente simple si una distribución exponencial negativa de un tipo adecuado se asume para 2) y 3).

Se considera que el tráfico es generado por fuentes individuales, las cuales sólo pueden hacer una llamada a la vez. La fuente individual tiene dos estados posibles:

0. Libre
1. Ocupado

El número de fuentes individuales (llamadas “fuentes” en la secuencia) puede ser tanto finito como infinito, pero el tráfico que generan debe de ser finito.

El uso de la distribución exponencial para intervalos de tiempo, o duraciones, implica que uno tiene la función de frecuencia

$$f(t) = \gamma \cdot e^{-\gamma \cdot t} \qquad (0 \le t \le \infty) \qquad \text{(TGD 1.2)}$$

y la función de distribución

$$F(t) = 1 - e^{-\gamma \cdot t} = P(\le t) \qquad \text{(TGD 1.3)}$$

El valor medio es

$$\bar{t} = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = \frac{1}{\gamma} \qquad \text{(TGD 1.4)}$$

La función de distribución inversa

$$\varphi(t) = 1 - F(t) = e^{-\gamma \cdot t} = P(>t) \qquad \text{(TGD 1.5)}$$

produce la probabilidad de que el intervalo de tiempo sea mayor que t.

La probabilidad de que éste termine en el intervalo (t, t + Δt) es ahora:

$$\int_{t}^{t+\Delta t} f(\tau)d\tau = F(t+\Delta t) - F(t) = \varphi(t) - \varphi(t+\Delta t) = e^{-\gamma \cdot t} - e^{-\gamma(t+\Delta t)} \qquad \text{(TGD 1.6)}$$

La probabilidad que la “duración” sea al menos t es:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma \cdot t} \qquad \text{(TGD 1.7)}$$

La probabilidad condicional de que una “duración” que todavía existe en t cese en (t, t + Δt) es ahora:

$$P(\Delta t) = \frac{e^{-\gamma \cdot t} - e^{-\gamma \cdot (t+\Delta t)}}{e^{-\gamma \cdot t}} = 1 - e^{-\gamma \cdot \Delta t} \qquad \text{(TGD 1.8)}$$

La expansión de (TDG 1.8) da:

$$P(\Delta t) = \gamma \cdot \Delta t - \frac{\gamma^2 \cdot \Delta t^2}{2!} + \frac{\gamma^3 \cdot \Delta t^3}{3!} - .... \qquad \text{(TGD 1.8a)}$$

Para valores pequeños de Δt domina el primer término y uno puede decir que la probabilidad de un evento en (t,t+Δt) es igual a:

$$P(\Delta t) \approx \gamma \cdot \Delta t \qquad \text{(TGD 1.9)}$$

es decir, proporcional a la intensidad de cambio γ y al intervalo de tiempo Δt.

El supuesto de la distribución exponencial implica:

1) P (Δt) será independiente de t.

2) El proceso supone que sólo puede ocurrir un evento a la vez, ya que la probabilidad de dos eventos sería proporcional a $(\Delta t)^2$, la cual puede ser descartada cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

El <u>estado momentáneo</u> de un sistema se describe por el número de <u>fuentes ocupadas simultáneamente</u>. Este número generalmente es igual al número de dispositivos ocupados.

Los estados momentáneos del sistema son simbolizados por (p). Las Probabilidades de estos estados, <u>las probabilidades de estado</u> son simbolizadas por [p], (p ≥ 0).	(TGD 1.10)

[p] también es igual a la parte de tiempo durante el cual el sistema está en estado (p).

En el supuesto del equilibrio estadístico, el sistema debe cambiar:

$$(p - 1) \rightarrow (p)$$

es usualmente: $(p) \rightarrow (p-1)$

De otra manera el sistema no retendría su equilibrio, pero a la larga tendería tanto a $p = 0$ como a $p = max$.

Denominemos la <u>intensidad de incremento</u> por λ_p y la <u>intensidad de disminución</u> por μ_p cuando el sistema está en (p) y asumimos distribución exponencial de intervalos entre llamadas y tiempos de ocupación

<u>Incremento = Disminución</u>

entonces tenemos:

$$\boxed{\lambda_{p-1} \cdot [p-1] = \mu_p \cdot [p] \qquad \text{(TGD 1.11)}}$$

para todo posible $p > 0$.

El sistemas debe estar siempre en uno de estos posibles estados (p). Por tanto:

$$\sum_p [p] = 1 \qquad \text{(TGD 1.12)}$$

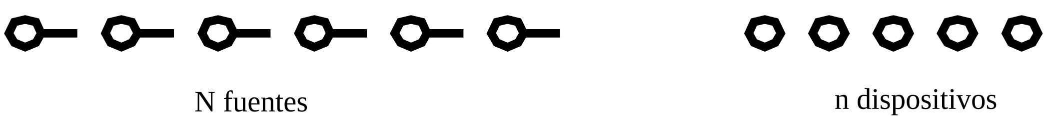
Por iteraciones sucesivas ascendentes desde p = 1 obtenemos:

$$[p] = \frac{\prod_{\rho=0}^{p-1} \lambda_\rho}{\prod_{\rho=1}^{p} \mu_\rho} \cdot [0] \qquad \text{(TGD 1.13)}$$

$$\sum_p [p] = 1$$

la cual es la solución general para un proceso de tráfico en equilibrio estadístico con distribución exponencial de cambios.

La contraparte física de (TGD 1.11) - (TGD 1.13) para el grupo de disponibilidad total puede representarse por un grupo con N fuentes y n dispositivos (Figura TGD 1/1).



<u>Figura TGD 1/1 : Grupo de disponibilidad total</u>

Aquí, p fuentes ocupadas corresponden a p unidades ocupadas (si $p \leq N$, $p \leq n$).

Para una interconexión gradual y un sistema de enlace, la representación será algo más complicada (Figura TGD 1/2 y Figura TGD 1/3).

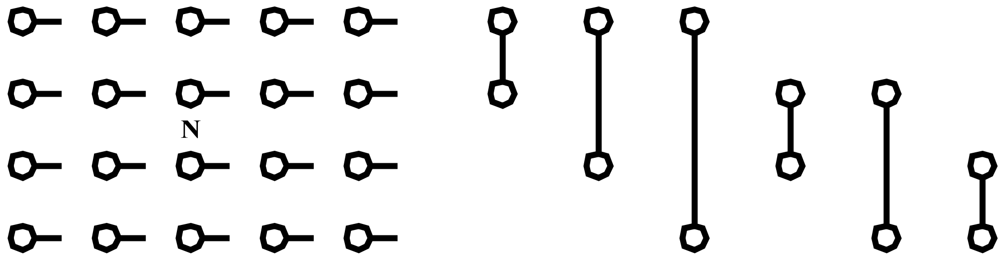


Figura TGD 1/2 - Interconexión Gradual

En la Figura TGD 1/2, las N = 20 fuentes están divididas en dos grupos de entrada, cada uno de los cuales tiene acceso a 3 de las 6 salidas. El estado (p) del sistema implica que todo p de las N fuentes está ocupado (y todos los p de los n = 6 dis positivos). Dependiendo de cómo las p ocupaciones se distribuyan entre los grupos de entrada y entre los n circuitos de salida, se obtienen diferentes números de grupos de entradas bloqueadas (si aquí p ≥ 3). La ecuación (TGD 1.11) aquí se refiere al número total de ocupaciones en el sistema. No puede ser aplicada a una parte del sistema.

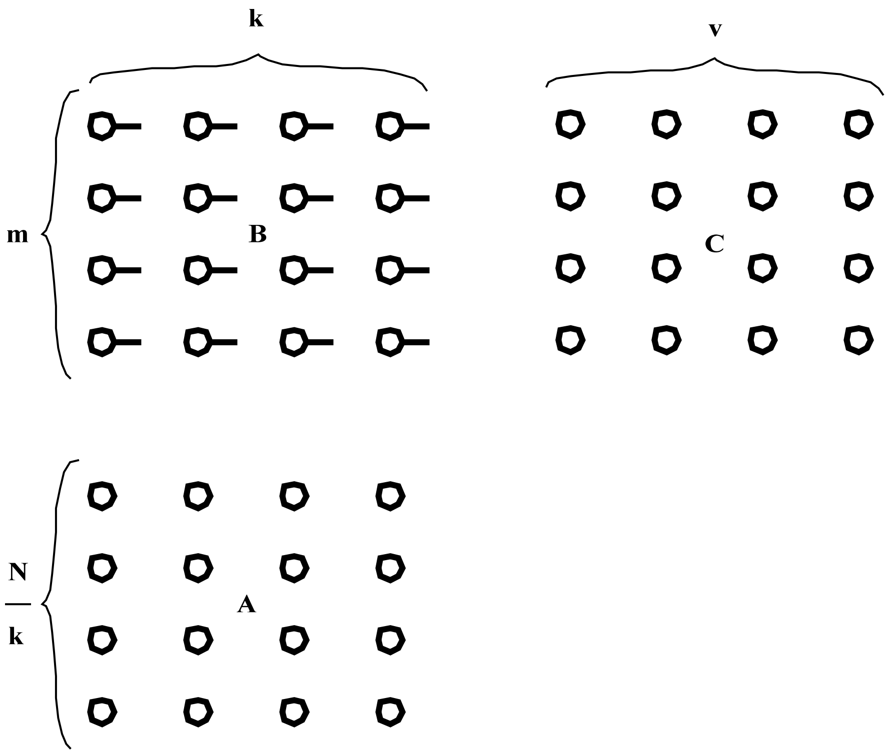


Figura TGD 1/3 : Sistema de enlace de dos etapas

En un sistema de enlace, las entradas también están divididas en grupos, columnas de entrada, en la Figura TGD 1/3 tenemos N/k entradas por columna. Para un sistema de pérdida, el número de ocupaciones siempre es el mismo en cada etapa. Por tanto, un total de p fuentes ocupadas implica también un total de p enlaces ocupados y un total de p salidas ocupadas.

La ecuación (TGD 1.11) se aplica a un sistema de enlace, sólo si por p se entiende el número total de fuentes ocupadas en el sistema. Puede sin embargo demostrarse que (TGD 1.11) también puede aplicarse aproximadamente a una parte de un sistema de enlace.

2. Aplicación en diferentes casos

Terminación

En lo siguiente asumiremos exclusivamente una distribución exponencial de tiempos de ocupación. Si la duración de la ocupación individual es descrita por:

$$f(t) = \frac{1}{s} e^{-\frac{t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.1)}$$

donde $s = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt =$ tiempo medio de ocupación.

La probabilidad de terminación de una ocupación en (t, t + Δt) es:

$$P(\Delta t) = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.2)}$$

y de no terminación

$$Q(\Delta t) = 1 - P(\Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.3)}$$

Si hay p ocupaciones independientes con la misma distribución del tiempo de ocupación, la probabilidad de que exactamente ν de ellas terminen en (t, t + Δt) es:

$$P_\nu(\Delta t) = \binom{p}{\nu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}}\right)^\nu \cdot e^{-\frac{\Delta t}{s} \cdot (p-\nu)} \qquad \text{(TGD 2.4)}$$

Para ν = 0

$$P_0(\Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{s} \cdot p} \qquad \text{(TGD 2.5)}$$

La probabilidad de que al menos una ocupación termine, es entonces:

$$Q_0(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) = 1 - e^{p \cdot \frac{\Delta t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.6)}$$

Para pequeños valores de Δt :

$$Q_0(\Delta t) \approx p \cdot \frac{\Delta t}{s} \qquad \text{(TGD 2.6a)}$$

El número esperado de terminaciones en (t, t + Δt) es:

$$\varepsilon(\nu) = \sum_{\nu=0}^{p} \nu \cdot \binom{p}{\nu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}}\right)^\nu \cdot e^{-\frac{\Delta t}{s} \cdot (p-\nu)} \qquad \text{(TGD 2.7)}$$

$$\varepsilon(\nu) = p \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}}\right)$$

el cual para pequeños Δt puede escribirse:

$$\varepsilon(\nu) \approx p \cdot \frac{\Delta t}{s} \qquad \text{(TGD 2.7a)}$$

Podemos por tanto decir que la intensidad de terminación para p ocupaciones independientes y exponencialmente distribuidas es

$$\boxed{\mu_p = \frac{p}{s}}$$

(TGD 2.8)

(TGD 2.8) será usado en lo siguiente de modo que, (TGD 1.13) pueda escribirse:

$$\left.\begin{aligned} [p] &= \frac{\prod_{\rho=0}^{p-1} \lambda_\rho \cdot s^p}{p!} \cdot [0] \\ \sum_p [p] &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(TGD 2.8a)}$$

A veces es conveniente usar s como una unidad de tiempo (s = 1).

Incremento:

El supuesto para λ_p es

$$\boxed{\lambda_p = y(p) \;.\; W(p)}$$

(TGD 2.9)

donde y(p) = intensidad de llamada de las fuentes en estado (p)
W(p) = aptitud del sistema para aceptar una nueva ocupación en el estado (p)

<u>Significado de W(p)</u>

W(p) = 1 significa : Una nueva llamada puede siempre tomar un dispositivo en el sistema;

W(p) = 0 significa: El sistema no puede aceptar una nueva llamada;

0 < W(p) < 1 significa: Sólo ciertas llamadas pueden ser aceptadas por el sistema..

Para un <u>grupo de accesibilidad total</u> (N > n) en un sistema de pérdida

W(p) = 1 para $0 \le p < n$

W(p) = 0 para $p = n$ (TGD 2.10)

en un sistema de espera

W(p) 1 para $0 \le p \le N$ (TGD 2.11)

ya que a las llamadas infructuosas se les permite esperar.

Para una <u>interconexión gradual</u> o un <u>sistema de enlace</u> en un <u>sistema de pérdida</u>

W(p) = 1 para p < límite dado. Las llamadas pueden ser aceptadas desde todos los grupos de entrada.

$0 < W(p) < 1$	para tales valores de p que el sistema sólo puede aceptar llamadas desde ciertos grupos de entrada o columnas de entrada a ciertas rutas.
$W(p) = 0$	la congestión total prevalece, ninguna llamada puede ser aceptada.

<u>Intensidad de llamada y(p)</u>

Considere una sola fuente. Asuma que:

$$f(t) = \beta \cdot e^{-\beta t} \qquad \text{(TGD 2.12)}$$

describe la distribución para el tiempo transcurrido desde el momento que la fuente se libera hasta el momento que vuelve a llamar; es decir, f(t) es la distribución de los intervalos de llamadas..

La probabilidad condicional de que la fuente haga una nueva llamada en el intervalo (t, t + Δt) es entonces:

$$P(\Delta t) = 1 - e^{-\beta \cdot \Delta t} \qquad \text{(TGD 2.13)}$$

Para pequeños Δt

$$P(\Delta t) \approx \beta \cdot \Delta t \qquad \text{(TGD 2.13a)}$$

Considere x independiente, fuentes libres con la misma distribución de intervalos de llamada, f(t). La probabilidad de que v de x fuentes haga llamadas en (t, t + Δt) es entonces:

$$P_v(\Delta t) = \binom{x}{v} \cdot \left(1 - e^{-\beta \cdot \Delta t}\right)^v \cdot e^{-\beta . \Delta t (x - v)} \qquad \text{(TGD 2.14)}$$

El número esperado de llamadas en el intervalo es:

$$\varepsilon(v) = x \cdot (1 - e^{-\beta \cdot \Delta t}) \qquad \text{(TGD 2.15)}$$

Para pequeños Δt, esto puede ecribirse:

$$\varepsilon(v) = x \cdot \beta \cdot \Delta t \qquad \text{(TGD 2.15a)}$$

Consecuentemente, la intensidad de llamadas con x fuentes libres es:

$$y_x = x \cdot \beta \qquad \text{(TGD 2.16)}$$

Para y(p), ahora establecemos los siguientes supuestos generales:

$y(p) = (N - p) . \beta$	(BE)	Bernoulli, Engset
$y(p) = y$	(E)	Poisson, Erlang
$y(p) = \beta . (\gamma + p)$	(NB)	Tipo binomial negativo

(TGD 2.17)

Los supuestos resultan en distribuciones de tráfico de tipos conocidos. (BE) es una distribución en la cual la intensidad de llamadas disminuye con el incremento del número de ocupaciones, (E) es independiente del número de ocupaciones y (NB) tiene una intensidad de llamada incrementada con el número de ocupaciones.

Puede hacerse un supuesto (TGD 2.17) para incluir otro, o sea:

BE $\rightarrow$ E	si N $\rightarrow \alpha$	$\beta \rightarrow 0$,	N.$\beta \rightarrow$ y	
BE $\rightarrow$ NB	si N < 0,	β < 0,	N.$\beta \rightarrow$ aγ,	-$\beta \rightarrow$ a
NB $\rightarrow$ BE	si a < 0,	γ < 0,	a$\gamma \rightarrow$ Nβ	-a $\rightarrow \beta$
NB $\rightarrow$ E	si a $\rightarrow$ 0,	$\gamma \rightarrow \infty$	a $\rightarrow$ y	

La inserción de (TGD 2.17) en (TGD 2.9) y (TGD 2.8a) resulta en diferentes distribuciones, las cuales son tratadas en las secciones siguientes para el grupo de disponibilidad total en sistemas de pérdida. Pero antes de eso, se definirán algunos conceptos generales para una distribución de tráfico.

3. Algunos conceptos generales y definiciones

La congestión de tiempo está simbolizado por E.

E = LA PROPORCION DE TIEMPO DURANTE EL CUAL LA CONGESTION PREVALECE
= PROBABILIDAD DE QUE TODOS LOS DISPOSITIVOS DISPONIBLES ESTÉN OCUPADOS

(TGD 3.1)

Para sistemas de espera, E = probabilidad de que todos los dispositivos estén ocupados, independientemente de que las llamadas estén o no esperando.

La congestión de Llamadas es simbolizado por B.

B = PROPORCION DE LLAMADAS INFRUCTUOSAS
= PROBABILIDAD DE UNA LLAMADA INFRUCTUOSA

(TGD 3.2)

$$E = \sum_{p \geq n} [p]$$, si p ≥ n denota todos los estados (p) cuando la congestión prevalece. (TGD 3.3)

$$B = \frac{\sum_{p \geq n} [p] \cdot y(p)}{\sum_{all\ p} [p] \cdot y(p)} =$$ Número esperado de llamadas cuando la congestión prevalece, dividido por el número total esperado de llamadas. Calculado por unidad de tiempo. (TGD 3.4)

= .

Para sistemas de espera, B = P (t>0) = la probabilidad de tener que esperar.

Para interconexiones graduales y sistemas de enlace, la suma precedente p ≥ n debe considerarse como simbólica.

El tráfico cursado es aquí simbolizado por A^1 = número medio de ocupaciones simultáneas.

Mensurable! $$A^1 = \sum_{p=1}^{n} p\ [p]$$ n = número máx. de ocupaciones simultáneas (TGD 3.5)

Como: $$\frac{p}{s} \cdot [p] = \lambda_{p-1} \cdot [p-1]$$ (TGD 3.6)

A^1 puede también escribirse:

$$A^1 = \sum_{p=1}^{n} s \cdot \lambda_{p-1} \cdot [\,p-1\,] = s \sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p \cdot [\,p\,] \qquad \text{(TGD 3.5a)}$$

El Tráfico Ofrecido se designa con A

$$A = \sum_{todo\ \ p} s \cdot y(p) \cdot [p] = $$ número medio de ocupaciones simultáneas ofrecidas al sistema (ya sean aceptadas o no). (TGD 3.7)

A DEPENDE EXCLUSIVAMENTE DEL MODELO TEORICO USADO.NO PUEDE MEDIRSE!

Diferencia entre A and A^1:

Escriba $$A = \sum_{p=0}^{r} s \cdot y(p) \cdot [\,p\,] \qquad r = \text{máx. de } p \qquad \text{(TGD 3.7)}$$

$$A^1 = \sum_{p=0}^{n-1} s \cdot W(p) \cdot y(p) \cdot [\,p\,] \qquad \text{(TGD 3.5b)}$$

donde n = número máximo de ocupaciones simultáneas, ≤ r.

Esto da: $$\Delta A = A - A^1 = \sum_{p=0}^{n-1} s \cdot \big(1 - W(p)\big) \cdot y(p) \cdot [\,p\,] + \sum_{p=n}^{n} s \cdot y(p)[\,p\,] \qquad \text{(TGD 3.8)}$$

o $$\Delta A = A - A^1 = \sum_{p=n}^{r} s \cdot y(p) \cdot [\,p\,] \quad if \quad W(p) = 1 \quad for \quad p < n$$

También podemos escribir:

$$\Delta A = A - A^1 = s \cdot \sum_{p=0}^{r} y(p) \cdot \big(1 - W(p)\big) \cdot [\,p\,] \qquad \text{(TGD 3.8a)}$$

$$\Delta A > 0 \quad solo \quad si \quad W(p) < 1 \quad ocurre \quad para \quad 0 \le p \le r$$

Esto significa que:

A > A^1 para un sistema de pérdida	
A = A^1 para un sistema de espera *	(TGD 3.9)

* si todos las llamadas esperan hasta ser servidas.

Carga en el dispositivo ν: ésimo

Simbolizada por a_ν

Hay diferentes expresiones para cacería secuencial y cacería aleatoria en sistemas de pérdida y en sistemas de espera.

El factor de mejora es simbolizado por F.

Si un sistema se extiende desde *n* hasta $n + \Delta n$ dispositivos sin cambio del tráfico ofrecido, *F* se define como:

$$F = A^1 (n + \Delta n) - A^1 (n) \qquad \text{(TGD 3.10)}$$

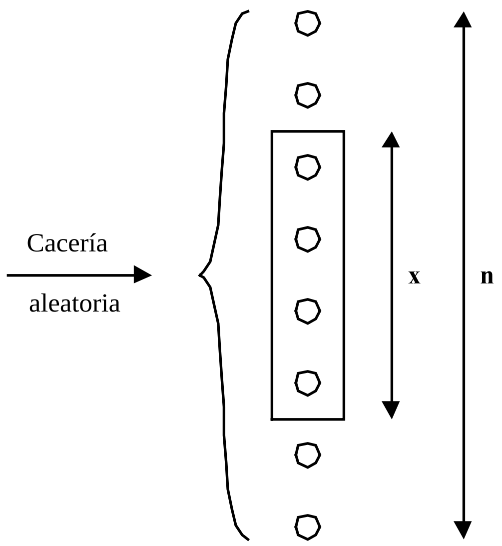
es decir, el factor de mejora es el incremento en el tráfico manejado para un incremento desde *n* to $n + \Delta n$ dispositivos.

Usualmente $\Delta n = 1$.

NOTE que un sistema con frecuencia puede extenderse en más de una forma. *F* debe entonces considerarse como multidimensional.

Probabilidad de x dispositivos especificos ocupados

Cacería aleatoria = la misma carga en todos los dispositivos = todas las combinaciones con el mismo número de dispositivos ocupados igualmente probable.



La probabilidad es simbolizada por H(x).
x = número de dispositivos especificos, definidos, por ejemplo, por sus números.

$$H(x) = \sum_{p=x}^{n} [p] \cdot \frac{\binom{x}{x} \cdot \binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p}} + \sum_{p>n} [p] \qquad \text{(TGD 3.11)}$$

La segunda suma es = 0 para un sistema de pérdida, pero > 0 para un sistema de espera

.
H(x) debería aplicarse con gran precaución para las interconexiones graduales y los sistemas de enlace, ya que todos los n dispositivos no siempre portan la misma carga y ya que todas las combinaciones de p dispositivos ocupados no son siempre igualmente probables.

Con CACERIA SECUENCIAL, las expresiones para H(x) son muy complicadas.

Duración del estado (p)

El sistema permanece en (p) hasta que una ocupación termine o una nueva llamada ocurra. Las intensidades de cambio son μ_p y λ_p.

La probabilidad de que (p) persista en el tiempo t es:

$$p_p(>t) = e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot t} \qquad \text{(TGD 3.12)}$$

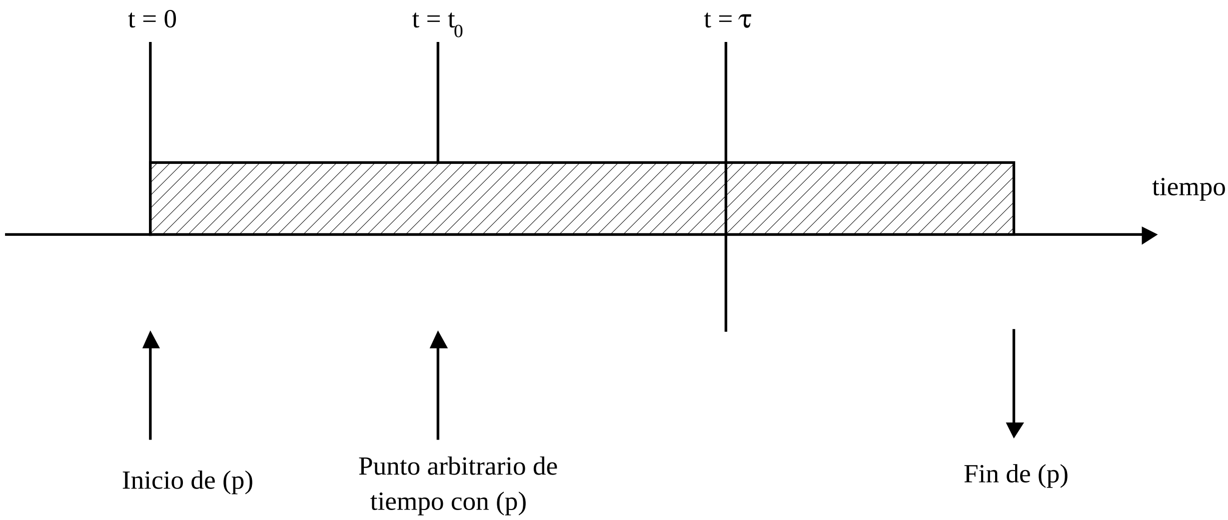
La función de frecuencia para la curación de (p) es:

$$f_p(t) = (\lambda_p+\mu_p)\cdot e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot t} \qquad \text{(TGD 3.13)}$$

Duración media:

$$\bar{t}_p = \frac{1}{\lambda_p+\mu_p} \qquad \text{(TGD 3.14)}$$

NOTE la diferencia entre la duración total y duración restante



La duración total de (p) se describe por:

$$f_p(t) = (\lambda_p+\mu_p)\cdot e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot t} \qquad \text{(TGD 3.15)}$$

La probabilidad de que (p) exista aún en τ es:

$$p_p(t>\tau) = e^{(\lambda_p+\mu_p)\cdot\tau} \qquad \text{(TGD 3.16)}$$

La probabilidad de que el estado (p) persista en τ cuando se sabe que el estado (p) existió en $t = t_0$:

$$P(> \tau - t_o) = P(t > \tau | t > t_o) = \frac{P(t > \tau)}{P(t > t_0)}$$

$$P(> \tau - t_0) = \frac{e^{-(\lambda_p + \mu_p)\cdot\tau}}{e^{-(\lambda_p + \mu_p)t_0}} = e^{-(\lambda_p + \mu_p)\cdot(\tau - t_0)}$$

Así: $P\ (> \tau - t_0) = P_p\ (t > \tau - t_0)$ (TGD 3.17)

es decir, la probabilidad de que (p) dure un tiempo θ es igual a la probabilidad de que (p) tenga una duración restante θ calculada desde un punto arbitrario de tiempo cuando el estado del sistema es (p). SE APLICA SOLAMENTE A DISTRIBUCION EXPONENCIAL!

Condición de convergencia

A fin de que un proceso de tráfico pueda lograr un equilibrio estadístico y permanecer en equilibrio, debe cumplirse la siguiente condición
:

$$\boxed{\sum_{all\ \ p} [p] \cdot (\lambda_p + \mu_p) = finite}$$

(TGD 3.18)

Esta condición implica que el número medio de cambios de (p) por unidad de tiempo debe ser finito.

4. Ejemplo de un proceso de estado simple en equilibrio.

Si se considera un grupo de circuitos durante un cierto intervalo de tiempo, el número de ocupaciones puede cambiar como se describe en la Figura 4/1.

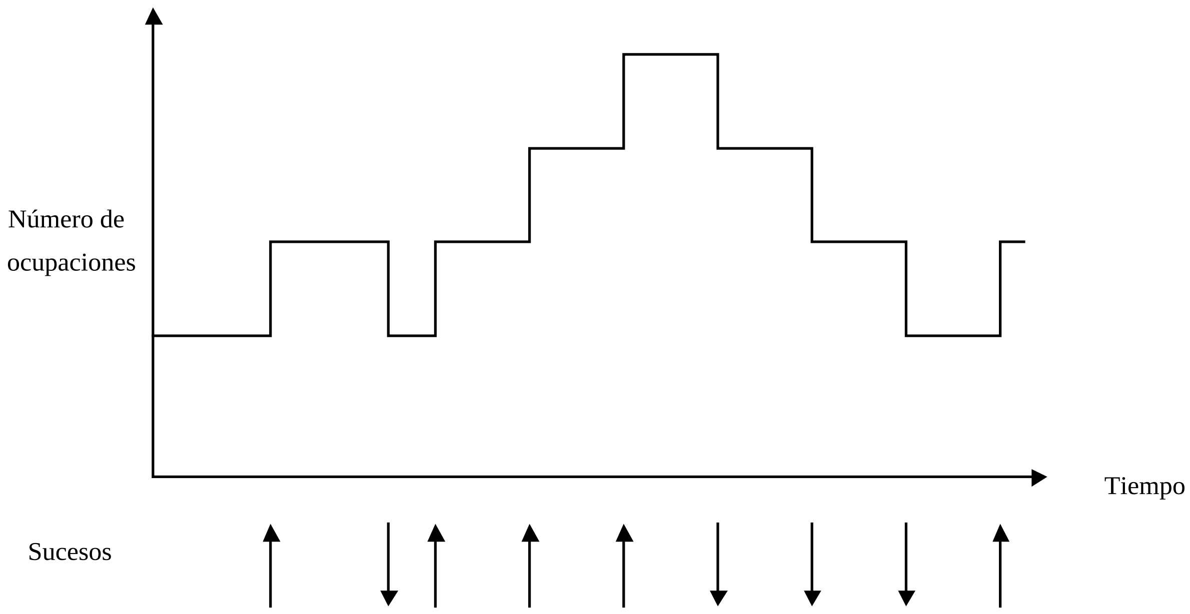


FIGURA TGD 4/1

Número de ocupaciones cambiantes con el tiempo, determinadas por eventos acaecidos.
(Llamada ↑, terminación ↓)

El proceso mostrado en la Figura TGD 4/1 puede o no estar en equilibrio. (Muy pocos eventos se muestran en la Figura para permitir cualquier conclusión al respecto.) Sin embargo, para decir que un proceso de tráfico está en equilibrio estadístico, debemos asumir que:

- el proceso no se está incrementando ni disminuyendo a la larga;

- el proceso se inició hace tanto tiempo, que la manera en que comenzó es ahora irrelevante para sus variaciones actuales.

Deducción de probabilidades de estado

Para ilustrar cómo pueden deducirse las probabilidades de estado para un proceso de tráfico, haremos los siguientes supuestos:

- grupo de accesibilidad total con n dispositivos;

- intensidad de llamada y cuando $p < n$ y cero cuando $p = n$, (es decir, la intensidad de llamadas es independiente del número de ocupaciones en el grupo y las llamadas rechazadas no cambian la intensidad de llamada => no hay intentos repetidos!).

- los tiempos de ocupación están exponencialmente distribuidos con una media de h.

- el proceso está en equilibrio estadístico.

Los supuestos se aplican al grupo de disponibilidad total del tipo Poisson-Erlang (cf TGD 2.17).

Ya que el equilibrio estadístico implica:

$$\boxed{\text{INCREMENTO = DISMINUCION}}$$

a la larga se aplica, (TGD.1.11):

$$\lambda_{p-1}(p-1) = \mu_p(p) \qquad \text{(TGD 1.11)}$$

donde $$\lambda_{p-1} = W(p-1)\cdot y \qquad \text{(TGD 4.1)}$$

$$\mu_p = \frac{p}{h} \qquad \text{(TGD 4.2)}$$

Ya que se considera un grupo de disponibilidad total, podemos escribir:

W(p) = 1 para $0 \leq p < n$

W(p) = 0 para p = n

Entonces, tenemos: $$y\cdot(p-1) = \frac{p}{h}\cdot(p) \qquad \text{(TGD 4.3)}$$

para p = 1, 2, 3, ..., n

Introduciendo: A = yh, podemos escribir:

A [p-1] = p . [p] (TGD 4.4)

lo que significa:

$$\begin{aligned} A(0) &= (1) \\ A(1) &= 2(2) \\ A(2) &= 3(3) \qquad \text{(TGD 4.4a)} \\ A(p-1) &= p\,.\,(p) \\ A(n-1) &= n\,.\,(n) \end{aligned}$$

Por lo que cualquier probabilidad de estado puede expresarse en probabilidad de estado vecino, y por tanto podemos hacer cálculos recurrentes de cualquier (p) al estado (0), esto es:

$$(1) = A\,.\,(0)$$

$$(2) = \frac{A}{2}\,.\,A\,.\,(0)$$

$$(3) = \frac{A}{3}\,.\,\frac{A}{2}\,.\,\frac{A}{1}\,.\,(0)$$

etc., esto es:

$$(p) = \frac{A^p}{p!}\cdot(0) \qquad \text{(TGD 4.5)}$$

donde p! = p.(p-1) . (p-2) ... 2.1

De acuerdo a la definición de probabilidades,

$$\sum_{p=0}^{n} (p) = 1 \qquad \text{(TGD 4.6)}$$

esto es, la suma de todas las probabilidades de estado posibles es igual a la unidad. Por tanto:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!} \cdot (0) = 1 \qquad \text{(TGD 4.7)}$$

si definimos p! = 0 para p = 0,

o: $$(0) \cdot \left(1 + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} \right) = 1$$

Podemos por tanto escribir:

$$(p) = \frac{\frac{A^p}{p!}}{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A^\nu}{\nu!}} \qquad \text{(TGD 4.8)}$$

donde p = n da la Primera Fórmula de Erlang.

Deducción clásica de la distribución de Erlang

Aplicamos los mismos supuestos señalados anteriormente. Consideremos el proceso de estado dentro de un intervalo corto (t, t + Δt) y describamos lo que puede pasar en este intervalo. Para un estado arbitrario (p), calculemos la probabilidad que el proceso tenga exactamente p ocupaciones en t + Δt.

Estas posibilidades aparecen cuando:

- Ya había p ocupaciones en t y ninguna nueva llamada o terminaciones ocurrieron en el intervalo;
- había menos que p ocupaciones en t y ocurrió un número pertinente de llamadas y no de terminaciones;
- hubo más que p ocupaciones en t para un número pertinente de terminaciones, pero no ocurrieron llamadas en el intervalo;
- ambas, llamadas y terminaciones, ocurrieron en el intervalo pero de tal manera que hubo exactamente p ocupaciones en t + Δt.

Podemos ahora escribir la expresión siguiente para la probabilidad de p ocupaciones en t + Δt.

$[P]_{t+\Delta t}$ = $[p]_t$ {1 - AΔt - pΔt} + (no evento)

+ $[p-1]_t$. A.Δt + (no evento)

+ $[p+1]_t$. (p+1) Δt (no evento)

+ $[x]_t$. Probabilidad de más de un evento.

(TGD 4.9)

$0 \leq x \leq n$

Para entender el último término en la ecuación, podemos considerar la probabilidad de que el estado sea cambiado de p-2 a p en (t, t + Δt). La probabilidad para esto es:

$$[p-2] \,.\, A\, \Delta t . A \Delta t = [p-2]\, A^2 \,.\, \Delta t^2$$

De hecho, si z eventos ocurren, su probabilidad es proporcional a $(\Delta t)^z$. Por eso, si dejamos que Δt^z se vuelva suficientemente pequeña, todos los casos con más de un evento en (t, t + Δt) pueden ser despreciados. Podemos entonces escribir (TGD 4.9) como:

$$[p]_{t+\Delta t} - [p]_t = - [p]_t \,.\, (A+p)\, \Delta t + [p-1]_t\, A \,.\, \Delta t + [p+1]_t\, (p+1)\, \Delta t$$

o

$$\frac{[p]_{t+\Delta t} - [p]_t}{\Delta t} = -[p]_t \cdot (A+p) + [p-1] \cdot A + [p+1] \cdot (p+1) \qquad \text{(TGD 4.10)}$$

Si hacemos $\Delta t \rightarrow 0$, el lado izquierdo de (TGD 4.10) se convierte en una derivada

$$\frac{\cdot [p]_{t+\Delta t} - [p]_t}{\Delta t} \rightarrow \frac{d[p]_t}{dt}$$

El equilibrio asume que las probabilidades de estado (p) no cambian con el tiempo, es decir: $\dfrac{d(p)_t}{dt} = 0$

El supuesto de equilibrio significa que las probabilidades de estado $(p)_t$ permanecen constantes independientemente del tiempo, t. Por eso podemos escribirlas simplemente (p).

Para $\dfrac{d[p]_t}{dt} = 0$, podemos ahora escribir (2.5.10) como sigue:

$$A\,[p] \;-\; (p+1)\,[p-1] \;=\; A\,[p-1] \;-\; p\,[p]$$

Para p = 0, [p-1] = 0, y por tanto A [0] - [1] = 0

Para p = 1 A [1] - 2 [2] = A [0] - [1] = 0

Consecuentemente llegamos a: $A\,[p-1] \;=\; p \cdot [p]$ (TGD 4.4)

como se ha dado arriba.

<u>Observación</u>: La expresión

$$\frac{d[p]}{dt} = -[p](A+p) + [p-1] \cdot A + [p+1](p+1) \qquad \text{(TGD 4.11)}$$

provee posibilidades para estudiar el proceso antes de que éste haya alcanzado su estado de equilibrio, tal como las condiciones de inicio.