Description Générale du Trafic

De TETRAPRO, édité par Mr. H. Leijon, ITU

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

Théorie de Base du Télétrafic (T)

DESCRIPTION GENERALE DU TRAFIC (TGD)

Contenus

1. Théorie commune pour les différents cas

Pour la description mathématique du processus du trafic, le principe du processus stochastique appelé “naissance et mort” est utilisé. Pour arriver aux résultats pratiquement utilisables, il faut généralement supposer que les intensités de naissance et de mort sont indépendantes du temps, et s'occupeent du processus lorsqu'il arrive à l'équilibre.

Pour des buts de l'ingénierie du trafic téléphonique, ce processus, “processus du trafic”, décrit le nombre d'équipements occupés ou des sources individuelles comme une fonction de temps. Cela laisse aux équations générales d'état à partir desquelles, à la limite, quand le temps t $\rightarrow \infty$, on peut dériver les probabilités d’état du système. On trouve qu'à partir de ces équations d'équilibre des expressions abrégées qui pourraient couvrir la plupart des cas généraux au sein de la théorie du trafic. C'est là où on devait commencer.

On fait les suppositions de base suivantes:

(1) Equilibre statistique, qui implique:
CROISSANCE = DECROISSANCE
loin dans le futur (t $\rightarrow \infty$)

(2) Distribution de probabilité des intervalles de temps entre les appels successifs.

(3) Distribution de probabilité pour la durée des occupations individuelles.

(4) Les sources individuelles du trafic fonctionnent indépendamment de l’état des autres sources.

(5) La durée de l’occupation individuelle est indépendante des autres occupations.

(6) Les règles deterministiques ou les distributions de probabilité s’appliquent pour ce qui arrive des appels sans succès.

(TGD 1.1)

La théorie sera spécialement simple si la distribution exponentielle négative du type approprié est supposée pour 2) et 3).

Le trafic est considéré être généré par des sources individuelles qui peuvent faire uniquement un appel dans un temps. La source individuells a deux états possibles:

0. Libre
1. Engagée

Le nombre de sources individuelles (appelées "sources" dans la suite) peuvent être fini ou infinies, mais le trafic qu'elles génèrent doit être fini.

L'utilisation de la distribution exponentielle pour les intervalles de temps, ou durée, implique qu'elle a la fonction de fréquence

$$f(t) = \gamma \cdot e^{-\gamma \cdot t} \qquad (0 \leq t \leq \infty) \qquad \text{(TGD 1.2)}$$

et la fonction de distribution

$$F(t) = 1 - e^{-\gamma \cdot t} = P(\leq t) \qquad \text{(TGD 1.3)}$$

La valeur moyenne est

$$\bar{t} = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{\gamma} \qquad \text{(TGD 1.4)}$$

La fonction de distribution inverse

$$\varphi(t) = 1 - F(t) = e^{-\gamma \cdot t} = P(> t) \qquad \text{(TGD 1.5)}$$

rend la probabilité que l'intervalle de temps est plus grand que t.

La probabilité qu'elle finisse dans l'intervalle *(t, t + Δ t)* est donc:

$$\int_t^{t+\Delta t} f(\tau)\, d\tau = F(t+\Delta t) - F(t) = \varphi(t) - \varphi(t+\Delta t) = e^{-\gamma \cdot t} - e^{-\gamma(t+\Delta t)} \qquad \text{(TGD 1.6)}$$

La probabilité pour que la "durée" est moins que *t* est:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma \cdot t} \qquad \text{(TGD 1.7)}$$

La probabilité conditionnelle pour que la "durée" qui existe à l'instant *t* cesse dans *(t, t + Δ t)* est donc

$$P(\Delta t) = \frac{e^{-\gamma \cdot t} - e^{-\gamma \cdot (t+\Delta t)}}{e^{-\gamma \cdot t}} = 1 - e^{-\gamma \cdot \Delta t} \qquad \text{(TGD 1.8)}$$

L'expansion de (TGD 1.8) donne

$$P(\Delta t) = \gamma \cdot \Delta t - \frac{\gamma^2 \cdot \Delta t^2}{2!} + \frac{\gamma^3 \cdot \Delta t^3}{3!} - K\ K \qquad \text{(TGD 1.8a)}$$

Pour des petites valeurs de Δt le premier terme domine et on peut dire que la probabilité d'un événement dans *(t, t+Δt)* est égale à:

$$P(\Delta t) \approx \gamma \cdot \Delta t \qquad \text{(TGD 1.9)}$$

c.à.d. proportionnelle à l'intensité du changement, γ et de l'intervalle de temps Δt.

La supposition de la distribution exponentielle implique:

1) P (Δt) devrait être indépendante de t.

2) Le processus suppose qu'un événement seulement peut prendre place à un temps, puisque la probabilité de deux événements doit être proportionnelle à $(\Delta t)^2$, qui peut être pris en compte quand $\Delta t \rightarrow 0$.

<u>L'état momentané</u> du système est décrit par le nombre de <u>sources engagées simultanément</u>. Souvent ce nombre est synonyme au nombre d'équipements engagés.

L'état momentané du système est décrit par (p). La probabilité de ces états, la <u>probabilité d'état</u> est décrit par [p], (p ≥ 0).	(TGD 1.10)

[p] est aussi égale à la part du temps durant la quelle le système est dans l'état (p).

Sur les suppositions de l'équilibre statique, le système doit changer:

$$(p-1) \rightarrow (p)$$

le plus souvent $(p) \rightarrow (p-1)$

Autrement le système ne doit pas retenir son équilibre mais dans une longue course devra tendre soit à $p = 0$ ou $p = max$.

Désignons <u>l'intensité de croissance</u> par λ_p et <u>l'intensité de décroissance</u> par μ_p quand le systeme est dans *(p)* et supposons une distribution exponentielle des intervalles entre les appels et les temps de maintien.

<u>Croissance = Décroissance</u>

cela donne:

$$\boxed{\lambda_{p-1} \cdot [\,p-1\,] = \mu_p \cdot [\,p\,]} \qquad \text{(TGD 1.11)}$$

pour tous les $p > 0$ possibles.

Le système doit toujours être dans l'un des états possibles *(p)*. Cependant:

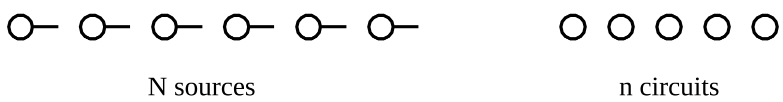
$$\sum_p [\,p\,] = 1 \qquad \text{(TGD 1.12)}$$

Par récurrence à partir de $p = 1$:

$$\boxed{\begin{array}{l} [\,p\,] = \dfrac{\prod_{\rho=0}^{p-1} \lambda_\rho}{\prod_{\rho=1}^{p} \mu_\rho} \cdot [\,0\,] \\[2ex] \sum_p [\,p\,] = 1 \end{array}} \qquad \text{(TGD 1.13)}$$

qui est la solution générale pour un processus de trafic en équilibre statique avec une distribution exponentielle de changement.

La contre partie physique de (TGD 1.11) - (TGD 1.13) pour le groupe à accessibilité totale peut être représentée par un groupe avec N sources et n circuits (Figure TGD 1/1).



<u>Figure TGD 1/1 : Groupe à accessibilité totale</u>

Ici les p sources engagées correspondent à p équipements (circuits) engagés (si $p \leq N$, $p \leq n$).

Pour un multiplexage gradué et un système de liaisons, la représentation peut être un peu plus compliquée (Figure TGD1/2 et Figure TGD 1/3).

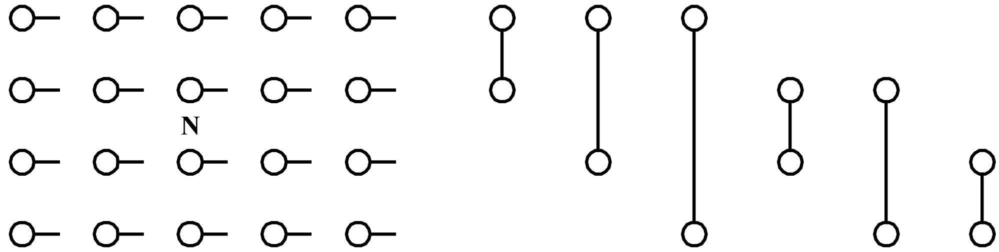


Figure TGD 1/2 - Multiplexage gradué

Dans la Figure TGD 1/2, les $N = 20$ sources sont divisées en quatre groupes d'entrée, chacun d'eux a accès à trois de six sorties. L'état *(p)* du système implique que l'ensemble des *p* des *N* sources sont engagées (et l'ensemble des *p* de $n= 6$ équipements). Dépendant de la distribution des *p* occupations parmi les groupes d'entrée et parmi les *n* circuits de sortie, différents nombres des groupes d'entrées bloqués sont obtenu (si $p \geq 3$). L'équation (TGD1.11) est associée ici au nombre total d'occupations dans le système. Elle ne peut pas être appliquée à une partie du système.

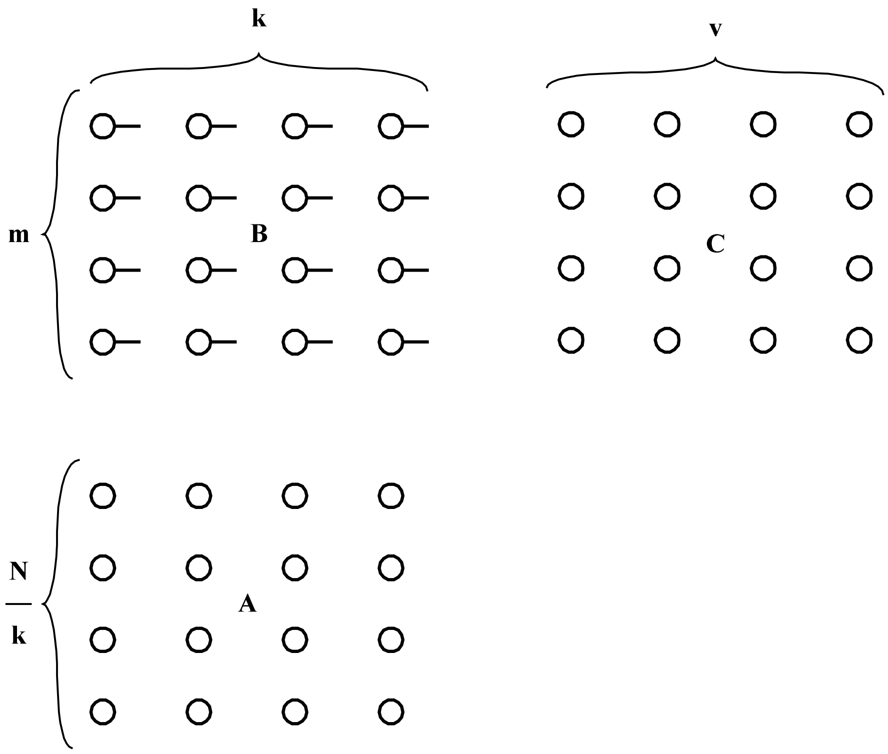


Figure TGD 1/3 : Deux étages du système de liaison

Dans le système de liaisons les entrées sont également divisées en groupe, colonne d'entrée, dans la figure TGD1/3 avec *N/k* entrées par colonne. Pour le système avec perte le nombre d'occupations est souvent égal dans tout étage. Cependant un total des *p* sources engagées implique aussi un total de p sorties engagées.

L'équation (TGD 1.11) tien seulement pour un système de liaisons, si on signifie par *p* le nombre total des sources engagées dans le système. Il peut cependant être montré que (TGD 1.11) peut être approximativement appliquée aussi à une partie du système de liaison.

2. Application sur les différents cas

Résiliation

Dans la suite on supposera exclusivement une distribution exponentielle des temps de maintien. Si la durée de l'occupation individuelle est décrite par:

$$f(t) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\frac{t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.1)}$$

où $s = \int_{t=0}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt =$ temps moyen de prise.

La probabilité de fin d'une occupation dans *(t, t + Δt)* est:

$$P(\Delta t) = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.2)}$$

et pour qu'elle continue

$$Q(\Delta t) = 1 - P(\Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.3)}$$

S'il y a *p* occupations avec la même distribution du temps de maintien, la probabilité pour qu'exactement ν d'entre elles terminent dans *(t, t + Δt)* est:

$$P_\nu(\Delta t) = \binom{p}{\nu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}}\right)^{\nu} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{s} \cdot (p-\nu)} \qquad \text{(TGD 2.4)}$$

Pour ν = 0

$$P_0(\Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{s} \cdot p} \qquad \text{(TGD 2.5)}$$

La probabilité qu'au moins une occupation prenne fin est alors:

$$Q_0(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) = 1 - e^{p \cdot \frac{\Delta t}{s}} \qquad \text{(TGD 2.6)}$$

Pour les petites valeurs de *Δt* :

$$Q_0(\Delta t) \approx p \cdot \frac{\Delta t}{s} \qquad \text{(TGD 2.6a)}$$

Le nombre espéré de terminaison dans *(t, t + Δt)* est:

$$\varepsilon(\nu) = \sum_{\nu=0}^{p} \nu \cdot \binom{p}{\nu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}}\right)^{\nu} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{s} \cdot (p-\nu)} \qquad \text{(TGD 2.7)}$$

$$\varepsilon(\nu) = p \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{s}}\right)$$

qui peut être écrit pour un petit Δt:

$$\varepsilon(\nu) \approx p \cdot \frac{\Delta t}{s} \qquad \text{(TGD 2.7a)}$$

On peut cependant dire que l'intensité de terminaisons pour p occupations exponentiellement distribuées et les occupations indépendantes est

$$\boxed{\mu_p = \frac{p}{s}} \qquad \text{(TGD 2.8)}$$

(TGD 2.8) peut être utilisée dans la suite, alors que (TGD 1.13) peut être écrite:

$$\left.\begin{array}{l} [\,p\,] = \dfrac{\prod\limits_{\rho=0}^{p-1} \lambda_\rho \cdot s^p}{p!} \cdot [\,0\,] \\[2ex] \sum\limits_{p} [\,p\,] = 1 \end{array}\right\} \qquad \text{(TGD 2.8a)}$$

Quelques fois, il est commode d'utiliser s comme unité de temps $(s = 1)$.

Croissance:

La supposition pour λ_p est

$$\boxed{\lambda_p = y(p) \cdot W(p)} \qquad \text{(TGD 2.9)}$$

où y(p) = intensité d'appel de la source à l'état *(p)*
W(p) = capacité du système pour accepter une nouvelle occupation à l'état *(p)*

<u>Signification de W(p)</u>

W(p) = 1 signifie : Un nouveau appel peut toujours saisir un équipement dans le système;

W(p) = 0 signifie : Le système ne peut pas accepter un nouveau appel;

0 < W(p) < 1 signifie : Seulement quelques appels peuvent être acceptés par le système.

Pour <u>un groupe à accessibilité totale</u> *(N > n)* dans un système avec perte

W(p) = 1 pour $0 \le p < n$

W(p) = 0 pour $p = n$ (TGD 2.10)

dans un système avec attente

W(p) 1 pour $0 \le p \le N$ (TGD 2.11)

comme les appels qui n'aboutissent pas ne sont pas autorisés d'attendre.

Pour un multiplexage gradué ou un système de liaisons dans un système avec perte :

W(p) = 1 pour p < limite donnée. Les appels peuvent être acceptés à partir de tous les groupes d'entrée.

0 < W(p) < 1 pour telles valeurs de p, que le système peut seulement accepter les appels de certains groupes ou colonnes d'entrée à certaines routes.

W(p) = 0 congestion totale courante, aucun appel ne peut être accepté.

Intensité d'appel y(p)

Considérons une source individuelle. Supposons que:

$$f(t) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot t} \tag{TGD 2.12}$$

décrit la distribution pour le temps écoulé à partir du moment où la source devient libre encore au moment d'appel, c.à.d. *f(t)* est la distribution des intervalles d'appels.

La probabilité conditionnelle pour que la source fasse un nouveau appel dans l'intervalle $(t,\ t + \Delta t)$ est donc:

$$P(\Delta t) = 1 - e^{-\beta \cdot \Delta t} \tag{TGD 2.13}$$

Pour un Δt petit

$$P(\Delta t) \approx \beta \cdot \Delta t \tag{TGD 2.13a}$$

Considérons x sources libres indépendantes avec la même distribution des intervalles d'appels, *f(t)*. La probabilité que ν de x sources fassent des appels dans $(t,\ t + \Delta t)$ est donc:

$$P_\nu(\Delta t) = \binom{x}{\nu} \cdot \left(1 - e^{-\beta \cdot \Delta t}\right)^\nu \cdot e^{-\beta \cdot \Delta t \cdot (x - \nu)} \tag{TGD 2.14}$$

Le nombre espéré d'appels dans l'intervalle est:

$$\varepsilon(\nu) = x \cdot (1 - e^{-\beta \cdot \Delta t}) \tag{TGD 2.15}$$

Pour Δt petit, il peut être écrit:

$$\varepsilon(\nu) = x \cdot \beta \cdot \Delta t \tag{TGD 2.15a}$$

L'intensité d'appels avec x sources libres est par conséquent:

$$y_x = x \cdot \beta \tag{TGD 2.16}$$

Pour *y(p)*, les suppositions générales suivantes sont donc faites:

y(p) = (N - p) . β	(BE)	Bernoulli, Engset
y(p) = y	(E)	Poisson, Erlang
y(p) = β . (γ + p)	(NB)	Type binomiale négative

(TGD 2.17)

Les suppositions résultent dans les distributions du trafic des types connus. (BE) est une distribution dans la quelle l'intensité d'appel décroît avec le nombre augmenté d'occupations, (E) est indépendant du nombre d'occupations, et (NB) a une intensité d'appel qui croit avec le nombre d'occupations.

Une supposition (TGD 2.17) peut être faite pour inclure une autre, viz :

BE $\rightarrow$ E	if N $\rightarrow \alpha$	$\beta \rightarrow 0$,	N.$\beta \rightarrow$ y	
BE $\rightarrow$ NB	if N < 0,	$\beta < 0$,	N.$\beta \rightarrow$ aγ,	-$\beta \rightarrow$ a
NB $\rightarrow$ BE	if a < 0,	$\gamma < 0$,	a$\gamma \rightarrow$ Nβ	-a $\rightarrow \beta$
NB $\rightarrow$ E	if a $\rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty$	a $\rightarrow$ y		

L'insertion de (TGD 2.17) dans (TGD 2.9) et (TGD 2.8a) résulte donc dans différentes distributions, qui sont traitées dans les sections qui suivent pour les groupes à accessibilité totale dans les systèmes avec perte. Mais avant ça, quelques concepts généraux seront définis pour une distribution de trafic.

3. Quelques concepts généraux et définitions

Temps de congestion est dénoté par E. (

E = LA PROPORTION DE TEMPS DANS LEQUEL LA CONGESTION DOMINE = PROBABILITE QUE TOUS LES EQUIPEMENTS DISPONIBLES SONT ENGAGES

(TGD 3.1)

Pour les systèmes avec perte E = probabilité que tous les équipements soient occupés sans prendre en considération si les appels attendent ou non.

Congestion d'appel est dénotée par B.

B = LA PROPORTION DES APPELS NON REUSSIS = PROBABILITE D'UN APPEL NON REUSSI

(TGD 3.2)

$$E = \sum_{p \geq n} [p]$$, si $p \geq n$ dénote tous les états (p) quand la congestion domine. (TGD 3.3)

$$B = \frac{\sum_{p \geq n} [p] \cdot y(p)}{\sum_{all\ p} [p] \cdot y(p)}$$

= nombre d'appels espérés quand la congestion domine
devisé par le nombre total d'appels espéré. (TGD 3.4)
Calculé par unité de temps

Pour les systèmes avec attente, $B = P\ (t>0)$ = la probabilité d'attendre.

Pour le multiplexage gradué et les systèmes de liaisons, la sommation ci-dessus $p \geq n$ doit être considérée comme symbolique.

Trafic écoulé est dénoté ici par A^1 = nombre moyen d'occupations simultanées.

Mesurable! $$A^1 = \sum_{p=1}^{n} p \cdot [p]$$ n = nombre max. d'occupations simultanées (TGD 3.5)

Puisque: $$\frac{p}{s} \cdot [p] = \lambda_{p-1} \cdot [p-1]$$ (TGD 3.6)

A^1 peut aussi être écrit:

$$A^1 = \sum_{p=1}^{n} s \cdot \lambda_{p-1} \cdot [p-1] = s \cdot \sum_{p=0}^{n-1} \lambda_p \cdot [p]$$ (TGD 3.5a)

Trafic Offert est dénoté par A

$$A = \sum_{all\ p} s \cdot y(p) \cdot [p] \qquad \text{(TGD 3.7)}$$

= nombre moyen d'occupations simultanées offertes au système (soit accepté ou non).

A DEPEND EXCLUSIVEMENT DU MODELE THEORIQUE UTILISE. NE PEUT PAS ETRE MESURE!

Différence entre A et A^1:

Ecrivons $A = \sum_{p=0}^{r} s \cdot y(p) \cdot [p]$ r = max. de p (TGD 3.7)

$$A^1 = \sum_{p=0}^{n-1} s \cdot W(p) \cdot y(p) \cdot [p] \qquad \text{(TGD 3.5b)}$$

où n = max. nombre d'occupations simultanées, $\leq r$.

Cela donne: $\Delta A = A - A^1 = \sum_{p=0}^{n-1} s \cdot \left(1 - W(p)\right) \cdot y(p) \cdot [p] + \sum_{p=n}^{n} s \cdot y(p)[p]$ (TGD 3.8)

ou $\Delta A = A - A^1 = \sum_{p=n}^{r} s \cdot y(p) \cdot [p] \quad si \quad W(p) = 1 \quad pour \quad p < n$

On peut également écrire:

$$\Delta A = A - A^1 = s \cdot \sum_{p=0}^{r} y(p) \cdot \left(1 - W(p)\right) \cdot [p] \qquad \text{(TGD 3.8a)}$$

$$\Delta A > 0 \qquad seulement\ si\ W(p) < 1 \quad a\ lieu\ pour \quad 0 \leq p \leq r$$

Cela signifie que:

$A > A^1$ pour les systèmes avec perte $A = A^1$ pour les systèmes avec attente(*)	(TGD 3.9)

(*) si tous les appels attendent jusqu'à ce qu'ils soient servis.

Charge sur le ν:éme circuit

Noté a_ν

Différentes expressions pour la chasse séquentielle et la chasse aléatoire, pour les systèmes avec perte et les systèmes avec attente.

<u>Le facteur d'amélioration</u> est noté *F*.

Si un système est extensible de *n* à $n + \Delta n$ équipements sans changement du trafic offert, *F* est défini comme:

$$F = A^{1}(n+\Delta n) - A^{1}(n) \qquad \text{(TGD 3.10)}$$

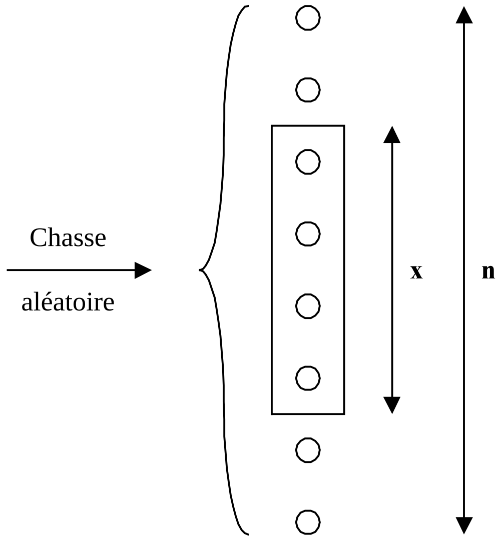
c.à.d. le facteur d'amélioration est la croissance du trafic écoulé pour une augmentation de *n* à $n + \Delta n$ équipements.

Souvent $\Delta n = 1$.

NOTER qu'un système peut souvent être extensible à plus qu'une façon. *F* doit être alors considéré comme multidimensionnel.

<u>Probabilité de *x* équipements spécifiés engagés</u>

Chasse aléatoire = quelques charges sur tous les équipements = toutes les combinaisons avec quelques nombres d'équipements engagés également probables.



La probabilité est décrite H(x).
x =le nombre des équipements spécifiés , défini par exemple par leurs nombres.

$$H(x) = \sum_{p=x}^{n} [p] \cdot \frac{\binom{x}{x} \cdot \binom{n-x}{p-x}}{\binom{n}{p}} + \sum_{p>n} [p] \qquad \text{(TGD 3.11)}$$

La seconde somme est = 0 pour les systèmes avec perte, mais > 0 pour un système avec attente.

H(x) devra être appliqué avec grande prudence aux multiplexages gradués et aux systèmes de liaisons, comme tous les *n* équipements ne pouvant pas écoulés toujours la même charge et comme toutes les combinaisons de *p* équipements engagés ne sont pas toujours également probables.

Avec la CHASSE SEQUENTIELLE, les expressions pour *H(x)* sont très compliquées.

<u>Durée de l'état *(p)*</u>

Le système reste dans *(p)* jusqu'à ce qu'une occupation termine ou un nouveau appel se présente. Les intensités de changement sont μ_p et λ_p.

La probabilité que *(p)* persiste après le temps *t* est:

$$p_p(>t) = e^{-(\lambda_p + \mu_p)\cdot t} \qquad \text{(TGD 3.12)}$$

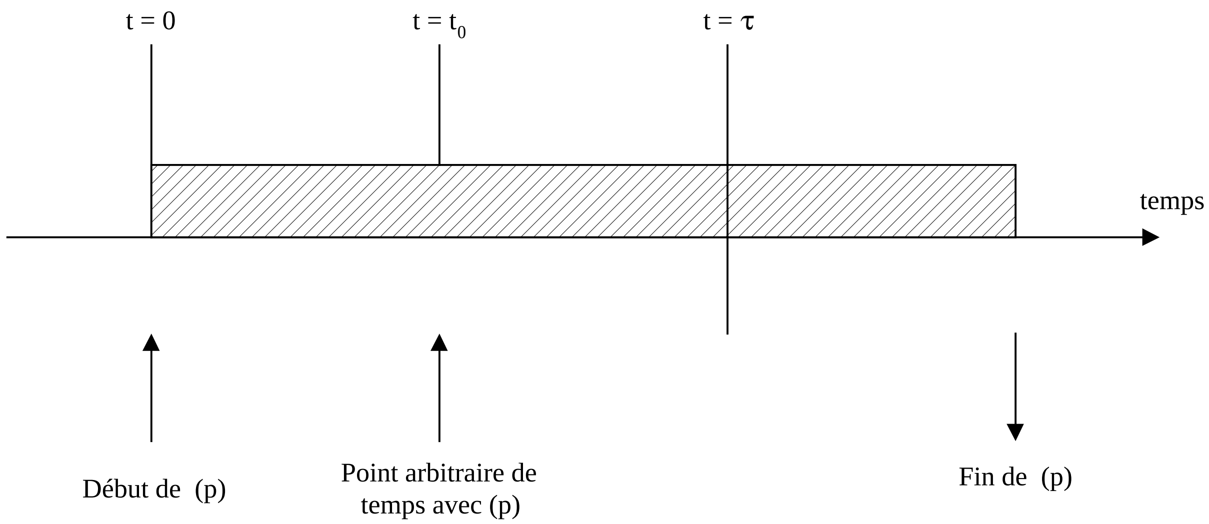
La fonction de fréquence pour la durée de *(p)* est:

$$f_p(t) = (\lambda_p + \mu_p) \cdot e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot t} \quad \text{(TGD 3.13)}$$

Durée moyenne:

$$\bar{t}_p = \frac{1}{\lambda_p + \mu_p} \quad \text{(TGD 3.14)}$$

NOTE la différence entre <u>la durée totale</u> et <u>la durée restante</u>



La durée totale de *(p)* est décrite par:

$$f_p(t) = (\lambda_p + \mu_p) \cdot e^{-p\lambda_p+\mu_p pp} \quad \text{(TGD 3.15)}$$

La probabilité que *(p)* existe jusqu'à τ est:

$$p_p(t > \tau) = e^{p\lambda_p+\mu_p p\tau} \quad \text{(TGD 3.16)}$$

La probabilité que l'état *(p)* persiste au moment τ quand on sait que cet état *(p)* existe en $t = t_0$:

$$P(>\tau - t_o) = P(t > \tau \mid t > t_o) = \frac{P(t>\tau)}{P(t>t_0)}$$

$$P(>\tau - t_0) = \frac{e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot\tau}}{e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot t_0}} = e^{-(\lambda_p+\mu_p)\cdot(\tau - t_0)}$$

Ainsi: $$P(>\tau - t_0) = P_P(t > \tau - t_0) \quad \text{(TGD 3.17)}$$

c.à.d. la probabilité que *(p)* tarde un temps θ est égale à la probabilité que *(p)* a une durée restante θ calculée à partir d'un point arbitraire du temps quand l'état du système est *(p)*. APPLIQUEE SEULEMENT AUX DISTRIBUTIONS EXPONENTIELLES!

Conditions de convergence

Dans le but qu'un processus de trafic peut atteindre l'équilibre statique et reste en équilibre, les conditions suivantes doivent être accomplies:

$$\boxed{\sum_{all\ p} [\,p\,] \cdot (\lambda_p + \mu_p) = finite} \qquad \text{(TGD 3.18)}$$

Cette condition implique que le nombre moyen de changements de *(p)* par unité de temps doit être fini.

4. Exemple d'un processus d'état simple en équilibre

Si un groupe de systèmes est considéré durant un certain intervalle de temps, le nombre d'occupations peut changer comme décrit dans la Figure 12/1.

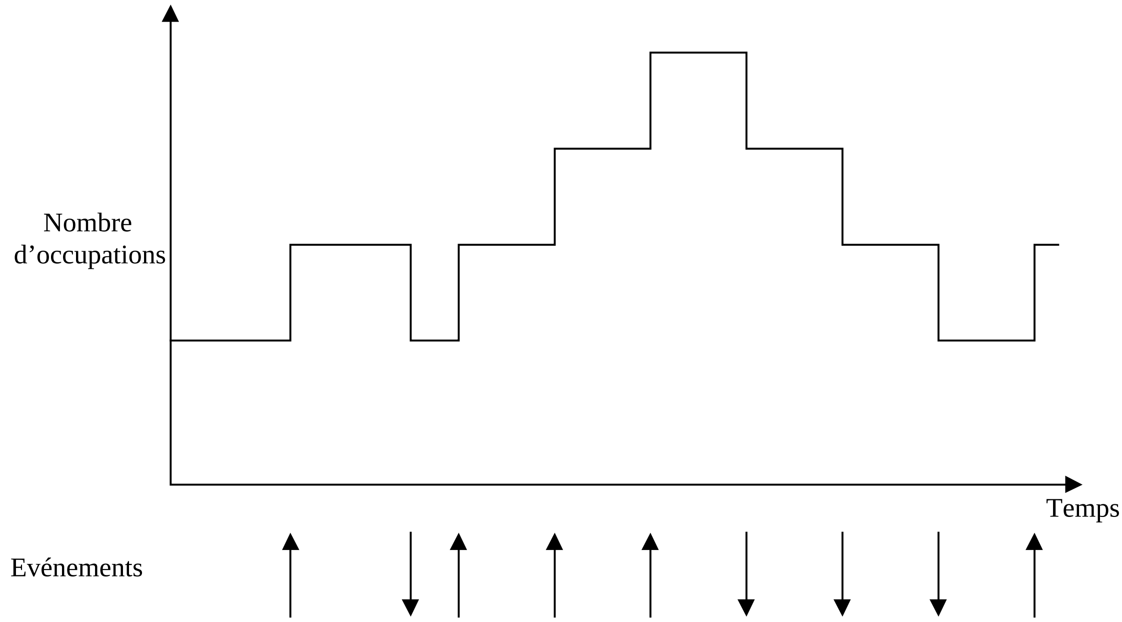


FIGURE TGD 4/1

Nombre d'occupations changeant avec le temps, déterminé par la présentation des événements.
(Appel ↑, Fin ↓)

Le processus montré dans TGD 4/1 peut ou ne peut pas être en équilibre. (Actuellement, deux petits événements sont montrés dans la figure pour permettre toutes conclusions dans ce respect.) Cependant ,dire qu'un processus de trafic est dans l'équilibre statique on doit supposer que:

- le processus ne croit pas et ne décroît pas dans la longue course;
- le processus commence déjà longtemps qu'il est maintenant sans rapport à ses variations présentes.

Déduction des probabilités d'état

Pour illustrer comment les probabilités d'état peuvent être déduites, on fait les suppositions suivantes:

- groupe à accessibilité totale avec n équipements;
- intensité d'appel y quand $p < n$ et zéro quand $p = n$, (c.à.d. l'intensité d'appel est indépendante du nombre d'occupations dans le groupe, et les appels rejetés ne changent pas l'intensité d'appel => pas de tentatives répétées!).
- les temps de maintien sont exponentiellement distribués avec une moyenne h.

- le processus est dans l'équilibre statique.

Les suppositions s'appliquent pour les groupes à accessibilité totale du type Poisson-Erlang (cf TGD 2.17).

Puisque l'équilibre statique implique:

$$\boxed{\text{CROISSANCE = DECROISSANCE}}$$

dans la longue course, (TGD.1.11) applique:

$$\lambda_{p-1}(p-1) = \mu_p(p) \qquad \text{(TGD 1.11)}$$

où

$$\lambda_{p-1} = W(p-1)\cdot y \qquad \text{(TGD 4.1)}$$

$$\mu_p = \frac{p}{h} \qquad \text{(TGD 4.2)}$$

Puisque le groupe à accessibilité totale est considéré, on peut écrire:

$W(p) = 1$ pour $0 \le p < n$

$W(p) = 0$ pour $p = n$

Alors, on a:

$$y\cdot(p-1) = \frac{p}{h}\cdot(p) \qquad \text{(TGD 4.3)}$$

pour $p = 1, 2, 3, \ldots, n$

Introduisant: $A = y\cdot h$, on peut écrire:

$$A[p-1] = p\cdot[p] \qquad \text{(TGD 4.4)}$$

qui veut dire que:

$$\begin{aligned} A(0) &= \quad (1) \\ A(1) &= 2\cdot(2) \\ A(2) &= 3\cdot(3) \\ &\text{M} \\ A(p-1) &= p\cdot(p) \\ &\text{M} \\ A(n-1) &= n\cdot(n) \end{aligned} \qquad \text{(TGD 4.4a)}$$

Il s'en suit que chaque probabilité d'état peut être exprimée dans sa probabilité d'état voisine, et on peut donc faire la récurrence à partir de n'importe quel *(p)* à l'état (0), c.à.d.:

$$(1) = A \cdot (0)$$

$$(2) = \frac{A}{2} \cdot A \cdot (0)$$

$$(3) = \frac{A}{3} \cdot \frac{A}{2} \cdot A \cdot (0)$$

etc., c.à.d.:

$$(p) = \frac{A^p}{p!} \cdot (0) \qquad \text{(TGD 4.5)}$$

où $p! = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Selon la définition des probabilités,

$$\sum_{p=0}^{n} (p) = 1 \qquad \text{(TGD 4.6)}$$

c.à.d. la somme de toutes les probabilités d'état possibles à l'unité. Cependant:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!} \cdot (0) = 1 \qquad \text{(TGD 4.7)}$$

si on défini $p! = 0$ pour $p = 0$,

ou: $$(0) \cdot \left(1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} \right) = 1$$

On peut cependant écrire:

$$(p) = \frac{\dfrac{A^p}{p!}}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A^\nu}{\nu!}} \qquad \text{(TGD 4.8)}$$

où $p = n$ donne première formule d'Erlang.

Déduction classique de la distribution d'Erlang

Quelques suppositions appliquées comme ci-dessus. On considère le processus d'état à l'intérieur du petit intervalle de temps *(t, t + Δt)* et on décrit ce que peut arriver dans cet intervalle. Pour un état arbitraire *(p)*, on calcule la probabilité que le processus aura exactement *p* occupations à *t + Δt*.

Ces possibilités apparaissent:

- Il y avait déjà *p* occupations à *t* et il n'y a pas de nouveaux appels ou de fin d'appels qui se présentent dans l'intervalle;
- Il y avait moins de *p* occupations à l'istant *t*, et un nombre pertinent d'appels et il n'y pas de fin d'appels qui se présente dans l'intervalle;

- Il y avait plus que *p* occupations à *t* mais un nombre pertinents de fin d'appels et pas d'appels qui se présentent dans l'intervalle;

- L'ensemble des appels et de fin d'appels se présentent dans l'intervalle, de telle façon qu'il y avait exactement *p* occupations à $t + \Delta t$.

On peut écrire les expressions suivantes pour la probabilité de *p* occupations à $t + \Delta t$.

$[P]_{t+\Delta t}$	$= [p]_t \{1 - A\Delta t - p\Delta t\} +$	(pas d'événement)
	$+ [p-1]_t . A.\Delta t +$	(pas d'événement)
	$+ [p+1]_t . (p+1) \Delta t$	(pas d'événement)
	$+ [x]_t .$	Probabilité de plus qu'un événement.

(TGD 4.9)

$0 \leq x \leq n$

Pour comprendre le dernier terme de l'équation, on peut considérer la probabilité que l'état est changé de *p-2* à *p* dans $(t, t + \Delta t)$. La probabilité pour cela est:

$$[p-2] \cdot A \cdot \Delta t \cdot A \cdot \Delta t = [p-2] \cdot A^2 \cdot \Delta t^2$$

De ce fait , si *z* événements se présentent, leur probabilité est proportionnelle à $(\Delta t)^z$. Cependant, si on laisse Δt^z devenir assez petit, tous les cas avec plus d'un événements dans $(t, t + \Delta t)$ peuvent être négligés. On peut donc écrire (TGD 4.9) comme:

$$[p]_{t+\Delta t} - [p]_t = -[p]_t \cdot (A+p) \cdot \Delta t + [p-1]_t \cdot A \cdot \Delta t + [p+1]_t \cdot (p+1) \cdot \Delta t$$

ou
$$\frac{[p]_{t+\Delta t} - [p]_t}{\Delta t} = -[p]_t \cdot (A+p) + [p-1] \cdot A + [p+1] \cdot (p+1) \qquad \text{(TGD 4.10)}$$

Si on laisse $\Delta t \to 0$, la quantité à gauche de l'équation (TGD 4.10) devient une dérivée

$$\frac{[p]_{t+\Delta t} - [p]_t}{\Delta t} \to \frac{d[p]_t}{dt}$$

L'équilibre suppose que les probabilités d'état (p) ne changent pas avec le temps, c.à.d.: $\frac{d[p]_t}{dt} = 0$

L'équilibre suppose que les probabilités d'état $(p)_t$ restent inchangées indépendamment du temps, *t*. On peut, cependant, les écrire simplement *(p)*.

Pour $\frac{d[p]_t}{dt} = 0$, on peut écrire (2.5.10) comme suit:

$$A[p] - (p+1) \cdot [p-1] = A \cdot [p-1] - p \cdot [p]$$

Pour $p = 0$, $[p-1] = 0$, et cependant $A[0] - [1] = 0$

Pour $p = 1$ $\quad A[1] - 2[2] = A[0] - [1] = 0$

On arrive par conséquent à: $A \cdot [p-1] = p \cdot [p]$ (TGD 4.4)

comme donné ci-dessus.

<u>Remarque</u>: L’expression

$$\frac{d[p]}{dt} = -[p]\cdot(A+p)+[p-1]\cdot A+[p+1]\cdot(p+1) \qquad \text{(TGD 4.11)}$$

fournie les possibilités d'étudier le processus avant d'atteindre son état d'équilibre, comme condition de commencement.