

**Dimensionamiento y Optimización  
de la Red de Empalme**

Sr. T. Fried, UIT



**UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS  
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION  
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES**



**Contenido:**

- 2.4 Tráficos
- 2.5 Dimensionamiento/ Optimización de rutas  
Cálculo del tráfico de desbordamiento
- 3.6 Cálculo de la Derivada  $\frac{\partial N}{\partial M}$
- 3.7 Cálculo de los Parámetros del Grupo Equivalente de Wilkinson
- 3.8 Cálculo de Funciones de bloqueo,  $W_i$
- 3.9 Cálculo de la fórmula de Erlang para números de circuitos enteros y no enteros, y derivadas

## 2.4 TRAFICOS

Antes de dimensionar/optimizar los grupos de circuitos entre las centrales de la red, se debe establecer una *matriz de tráfico* entre éstas. Este capítulo describe el método de cálculo para los diferentes tipos de red que se consideran, esto es:

- redes locales (rural, metropolitana)
- redes de larga distancia (nacional, regional)

### 2.4.1 Zonas de tráfico y abonados

Para redes locales, los cálculos de tráfico se basan en abonados/central, categorías de abonados y zonas de tráfico.

#### Para ello asumimos que :

- el área bajo consideración ha sido dividida en *zonas de tráfico*. Se asume que los abonados que pertenecen a dicha zona tienen *propiedades de tráfico uniformes*, tales como tráfico originado y terminado por abonado, así como dispersión de tráfico hacia otras zonas;
- se conoce el número de abonados (NSUB) de cualquier zona,  $T$ , para cualquier central dada,  $E$ . Estos se han definido en los datos de entrada, o se han calculado en los anteriores límites de optimización:  $NSUB(E, T)$ .
- se conoce el número total de abonados que pertenece a cualquier zona de tráfico,  $T$ . Esto se ha calculado después de haber leído los datos de entrada concernientes a *definición de zona* y *distribución de abonados*:  $SUBTZ_T$
- el tráfico total de cualquier zona de tráfico,  $T$ , a otra zona de tráfico,  $U$ , se conoce por los datos de entrada :  $A_{TU}$ .

El *interés de tráfico específico* entre un abonado en la zona de tráfico  $T$ , y un abonado en la zona de tráfico  $U$ , se puede expresar como

$$a(T,U) = \frac{A_{TU}}{SUBTZ_T \cdot SUBTZ_U}$$

Finalmente, el tráfico de cualquier central,  $E$ , a cualquier otra central,  $F$ , se puede escribir ahora como:

$$\text{Tráfico}(E, F) = \sum_{T,U} [NSUB(E, T) \cdot NSUB(F, U) \cdot a(T, U)]$$

### 2.4.2 Matriz de tráfico

Para redes de larga distancia o para redes locales, donde los límites no están sujetos a investigación por el programa, se proporciona una matriz de tráfico, definiendo el interés de tráfico entre cualquier par de centrales. Para subcentrales, unidades remotas de abonados, etc., el tráfico total de entrada y de salida puede especificarse para permitir el dimensionamiento de rutas de/ hacia la central madre.

Los tráficos dados en esta matriz son tráficos de horas pico.

En caso de *horas pico no coincidentes*, la matriz de tráfico contiene el volumen de tráfico total diario en horas erlang, y se debe proporcionar información sobre el perfil (PROF) de tráfico relevante. El valor de tráfico para cualquier tiempo dado,  $t$ , se encuentra entonces al multiplicar el tráfico total por el valor del perfil de tráfico para  $t$ , es decir:

$$\text{Tráfico}(E, F, t) = A(E, F) \cdot PROF(E, F, t)$$

Obviamente, no se necesita definir un perfil de tráfico específico para cada caso de tráfico. Las centrales pueden agruparse en categorías, y los perfiles de tráfico definirse más bien entre categorías que entre centrales.

Para redes locales y nacionales, este agrupamiento de centrales puede depender probablemente del porcentaje de categorías de abonados, tales como residencial, de negocios, servicios públicos, de centralitas automáticas privadas (PABXs), etc. Ya que los hábitos telefónicos de cada una de estas categorías se puede medir o estimar, puede encontrarse también el perfil de una “mezcla” de categorías dada.

Para redes internacionales, los perfiles dependerán más bien de la diferencia horaria entre los países involucrados y en cualesquiera relaciones especiales entre ellos.

## 2.5 DIMENSIONAMIENTO/ OPTIMIZACION DE RUTAS CALCULO DE TRAFICOS DE DESBORDAMIENTO

Este capítulo tiene que ver con la tarea de proveer circuitos entre las varias centrales de la red, de tal manera que el costo total de la red sea minimizado, tomando en consideración:

- el grado de servicio deseado;
- las propiedades del tráfico ofrecido;
- las propiedades técnicas del equipo de conmutación;
- los costos del equipo de transmisión y conmutación.

Este capítulo describe la solución matemática de dimensionamiento y optimización, mientras que los problemas numéricos restantes se tratarán en el capítulo 3.5.

En este capítulo se usarán las siguientes notaciones:

N = número de circuitos en una ruta  
k = disponibilidad o número de salidas a una ruta por unidad selectora de grupo  
A = media = varianza de un tráfico de tipo Poisson  
M = media del tráfico ofrecido a una ruta alternativa  
V = varianza del tráfico ofrecido a una ruta alternativa  
m = media del tráfico de desbordamiento de una ruta  
v = varianza del tráfico de desbordamiento de una ruta  
B = m/M = congestión en una ruta.

### 2.5.1 Teoría de la Congestión para Disponibilidad Total

#### Rutas primarias

Asumiendo un tráfico ofrecido de tipo Poisson, la media y la varianza del tráfico de desbordamiento de una ruta directa se obtienen por las fórmulas de Wilkinson:

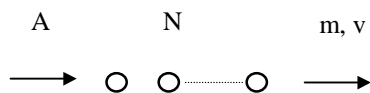
$$m = A \cdot E_N(A)$$

$$v = m \cdot \left( 1 - m + \frac{A}{N + 1 - A + m} \right)$$

donde  $E_N(A)$  representa la fórmula de pérdida de Erlang

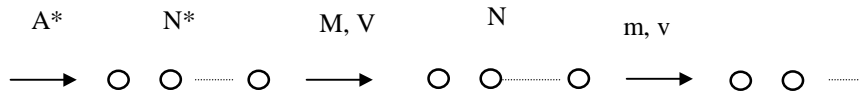
$$E_N(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}}$$

La siguiente figura ilustra el modelo de Wilkinson para rutas primarias:



**Rutas Alternativas**

El tráfico ofrecido de la media  $M$  y la varianza  $V$ , es substituido por el tráfico de igual media y varianza desbordando desde un grupo imaginario de disponibilidad total al que se ofrece tráfico del tipo Poisson:



Los parámetros  $N^*$  y  $A^*$  de este “grupo equivalente” se pueden determinar con el sistema de ecuación:

$$M = A^* \cdot E_{N^*}(A^*)$$

$$V = M \cdot \left( 1 - M + \frac{A^*}{N^* + 1 - A^* + M} \right)$$

Ver el capítulo 3.7 para conocer el método de determinación de  $N^*$  y  $A^*$ .

La media y la varianza del tráfico de desbordamiento de la ruta alternativa se estima como

$$m = A^* \cdot E_{N+N^*}(A^*)$$

$$v = m \cdot \left( 1 - m + \frac{A^*}{N + N^* + 1 - A^* + m} \right)$$

**2.5.2 Teoría de la Congestión para Disponibilidad Restringida**

El problema de la congestión en rutas con disponibilidad restringida, se resuelve introduciendo la *función de pérdida*,  $W_i$ , que representa la probabilidad condicional de una llamada desbordándose desde de la ruta, dado que precisamente los  $i$  circuitos se encuentren ocupados cuando la llamada llega. De esta forma  $W_i$  describe las propiedades principales de la actual interconexión gradual y/o del sistema de enlace. Los momentos del tráfico de desbordamiento se derivan de ecuaciones de estado para una función de probabilidad *arbitraria*  $W_i$ . Un ejemplo de la función  $W_i$  se muestra en el Capítulo 3.8.

**Rutas primarias**

El esquema de cálculo para rutas primarias se ilustra en la siguiente figura; la “caja” frente a la ruta indica la disponibilidad restringida:



La media y la varianza del tráfico de desbordamiento se pueden escribir así:

$$m = A \cdot \sum_{i=0}^N W_i \cdot P(i)$$

$$v = m - m^2 + A \cdot \sum_{i=0}^N W_i \cdot Q(i)$$

donde  $P(i)$  se puede determinar de las relaciones

$$P(i) \cdot A \cdot (1 - W_i) = P(i+1) \cdot (i+1) \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\sum_{i=0}^N P(i) = 1$$

y  $Q(i)$  se puede determinar de las relaciones

$$Q(N-1) \cdot A \cdot (1 - W_{N-1}) = Q(N) \cdot (N+1) - P(N) \cdot A \cdot W_N$$

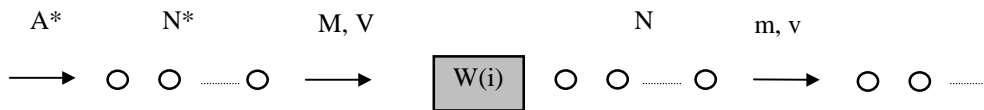
$$Q(i) \cdot A \cdot (1 - W_i) = Q(i+1) \cdot [i+2 + A \cdot (1 - W_{i+1})] - Q(i+2) \cdot (i+2) - P(i+1) \cdot A \cdot W_{i+1} \quad \text{para } i = N-2, N-3, \dots, 0$$

$$\sum_{i=0}^N Q(i) = m$$

Ver el capítulo 3.5 para consideraciones numéricas de estos cálculos.

### Rutas alternativas

Un “grupo equivalente”  $(N^*, A^*)$  correspondiente a la media y a la varianza de tráfico ofrecido dadas, se determina tal como se muestra en el caso de disponibilidad total. Así se obtiene el esquema sustituto que aparece en la figura siguiente:



Desafortunadamente, la solución “exacta” dada por Wallström es muy complicada para uso práctico en los programas de planificación de redes.

Para calcular los momentos requeridos de tráfico de desbordamiento, hacemos uso de soluciones *aproximadas*, las cuales se han comparado ambas, tanto la solución “exacta” como las simulaciones extensivas, habiéndose hallado que son suficientemente buenas. A continuación se describen dos aproximaciones:

**Aproximación I:** Los momentos requeridos se construyen a partir de los momentos correspondientes de los casos más sencillos que se describen anteriormente. Así, podemos escribir:

$$m = m_2 + m_3 - m_1$$

$$\frac{v}{m} = \frac{v_2}{m_2} + \frac{v_3}{m_3} - \frac{v_1}{m_1}$$

donde los subíndices indican los casos más sencillos, esto es:

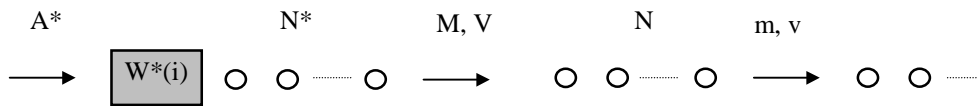
- 1: Disponibilidad total, rutas primarias
- 2: Disponibilidad total, rutas alternativas
- 3: Disponibilidad restringida, rutas primarias

Para el dimensionamiento de rutas para un grado de servicio dado, la aproximación correspondiente será:

$$N = N_2 + N_3 - N_1$$

La aproximación para  $N$  sólo es aceptable para valores pequeños de  $B$ , ( $B < 0.05$ ), mientras que la aproximación para  $m$  y  $v$  es mejor para valores más altos de  $B$  ( $B > 0.15$ ).

**Aproximación II:** Aquí el esquema de cálculo mostrado arriba cambia ligeramente a la siguiente figura:



donde  $W_i^* = 0$  para  $i = 0, 1, 2, K, N^* - 1$

$W_i^* = W_{i-N^*}$  para  $i = N^*, N^* + 1, K, N^* + N$

y  $W_i$  se calcula de la manera usual.

Ahora  $P(i)$ ,  $Q(i)$ ,  $m$  y  $v$  pueden calcularse como se describió anteriormente, usando  $A^*$  y  $(N^* + N)$  en vez de  $A$  y  $N$ .

### 2.5.3 Dimensionamiento

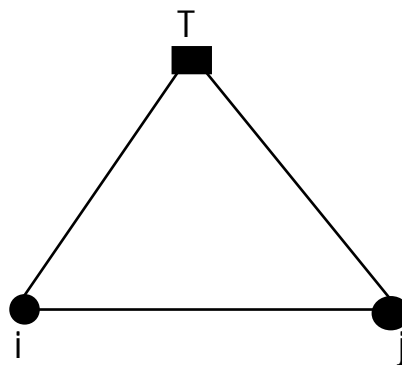
Las rutas entre centrales pueden ahora dimensionarse en base a las fórmulas o métodos anteriormente dados.

Ya que la congestión  $B(N)$  disminuye progresivamente por el incremento de  $N$ , comenzando con  $B(N) = 1$  para  $N = 0$ , y  $B(N) \rightarrow 0$  para  $N \rightarrow \infty$ , el método que se sugiere a sí mismo es comenzar con un valor apropiado para  $N$ , e ir incrementando  $N$  en pasos adecuados hasta que el  $B(N)$  resultante se convierta en más pequeño o igual que un valor  $B$  previamente descrito. Para detalles de cálculo, que considere los problemas numéricos que pueden ocurrir para valores mayores de  $N$ , ver el capítulo 3.5.

### 2.5.4 Optimización de circuitos en rutas de alto uso

Es prácticamente imposible optimizar simultáneamente todas las rutas en una red de encaminamiento alternativo, entonces tenemos que recurrir a la suboptimización, es decir, tratando sólo una ruta en particular, asumiendo que el resto de la red ya ha sido optimizada y dimensionada. Comenzando con una solución aproximada, entonces llegaremos iterativamente al costo óptimo tratando cada ruta individualmente, haciendo uso de resultados anteriores para las otras rutas de la red.

Considere la configuración sencilla de las tres centrales que se muestran a continuación:



Hay dos centrales,  $i$  y  $j$ , en el nivel más bajo de una supuesta estructura jerárquica de red y otra central,  $T$ , llamada la central de tránsito o tándem, a un nivel más alto.

Considerando el caso de tráfico de  $i \rightarrow j$ , existen 3 posibilidades para encaminar el tráfico:

- todo el tráfico se cursa en la ruta de  $i$  a  $j$ ; simbolizamos este caso como **D**, para encaminamiento directo;
- todo el tráfico se cursa a través de la central tándem,  $T$ ; representamos este caso como **T**;



- parte del tráfico es cursado en la ruta  $i \rightarrow j$  y el resto del tráfico se desborda a las rutas  $i \rightarrow T \rightarrow j$ . Simbolizamos este caso como **H**, para rutas de alto uso.

Es el tercer caso es el que nos interesa aquí, y en particular la pregunta: qué proporción del tráfico se debe cursar en las rutas directas y en las desbordadas, respectivamente. Como nos interesa la **optimización**, la pregunta será entonces “¿Qué proporción satisfará a menor costo la demanda de tráfico de  $i$  hacia  $j$ , para costos y grado de servicio dados?”.

Para el patrón de encaminamiento triangular simple que se mostró arriba, se puede entonces asumir como conocidos los siguientes datos:

$M, V$	media y varianza del tráfico ofrecido a la ruta $i \rightarrow j$
$M_{10}, V_{10}$	media y varianza del tráfico ofrecido a la ruta $i \rightarrow T$ , sin incluir el tráfico de desbordamiento de la ruta $i \rightarrow j$
$M_{20}, V_{20}$	igual que el anterior, para la ruta $T \rightarrow j$
$c, c_1, c_2$	costo de un circuito adicional en las rutas $i \rightarrow j$ , $i \rightarrow T$ , y $T \rightarrow j$ , respectivamente.

Si representamos la media y la varianza del tráfico de desbordamiento de la ruta  $i \rightarrow j$  como  $m(N)$  y  $v(N)$ , donde  $N$  indica el número de circuitos de la ruta  $i \rightarrow j$ , obtenemos el tráfico total ofrecido a las rutas de desbordamiento como:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{10} + m(N) & M &= M_0 + m(N) \\ V_1 &= V_{10} + v(N) & V_2 &= V_{20} + v(N) \end{aligned}$$

Deseamos determinar  $N$  de manera que el costo resultante se minimice, es decir, tenemos que minimizar la función de costo

$$C(N) = c \cdot N + c_1 \cdot N_1 + c_2 \cdot N_2$$

con respecto a  $N$ .  $N_1$  y  $N_2$  son los circuitos en las rutas de desbordamiento.

Como se asume conocido el grado de servicio para las rutas de desbordamiento,  $N_1$  y  $N_2$  son funciones de  $N$ . Para encontrar el mínimo de la función de costo debemos igualar a cero su derivada, con respecto a  $N$ .

Obtenemos

$$c + c_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N} + c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N} = 0$$

De esta relación, el valor óptimo de  $N$  puede encontrarse entonces como sigue:

Para la primera ruta de desbordamiento sabemos que, para un grado de servicio dado,

$$N_1 = N_1(M_1, V_1)$$

o, alternativamente, para  $\Theta_1 = \frac{V_1}{M_1}$ ,

$$N_1 = N_1(M_1, \Theta_1)$$

Entonces podemos escribir

$$\frac{\partial N_I}{\partial N} = \frac{\partial N_I}{\partial M_I} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial N} + \frac{\partial N_I}{\partial \Theta_I} \cdot \frac{\partial \Theta_I}{\partial N}$$

De

$$M_I = M_{I0} + m \quad \text{y} \quad \Theta_I = \frac{V_{I0} + v}{M_{I0} + m}$$

encontramos

$$\frac{\partial M_I}{\partial N} = \frac{\partial m}{\partial N} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Theta_I}{\partial N} = \frac{\frac{\partial v}{\partial N} - \Theta_I \cdot \frac{\partial m}{\partial N}}{M_I}$$

Como la segunda expresión es usualmente bastante pequeña, entonces obtenemos aproximadamente

$$\frac{\partial N_I}{\partial N} \approx \frac{\partial N_I}{\partial M_I} \cdot \frac{\partial m}{\partial N} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N_2}{\partial N} \approx \frac{\partial N_2}{\partial M_2} \cdot \frac{\partial m}{\partial N}$$

Finalmente, al insertar estas derivadas en la derivada de la función de costo, obtenemos

$$-\frac{\partial m}{\partial N} = \frac{c}{c_1 \cdot \frac{\partial N_I}{\partial M_I} + c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_2}}$$

Las derivadas  $\frac{\partial N_I}{\partial M_I}$  y  $\frac{\partial N_2}{\partial M_2}$  se pueden calcular como se muestra en el capítulo 3.6 y son *constantes* durante la suboptimización de la ruta bajo consideración, del mismo modo que  $c$ ,  $c_1$  y  $c_2$ . Así, el problema de optimización se reduce a encontrar un valor para  $N$ , de modo que

$$-\frac{\partial m}{\partial N} = \text{constante}$$

Aunque con esta expresión se obtiene fácilmente el  $N$  óptimo para rutas con disponibilidad total, para rutas con disponibilidad restringida (por ej. rutas graduales) las derivadas no se pueden encontrar fácilmente. Por tanto...

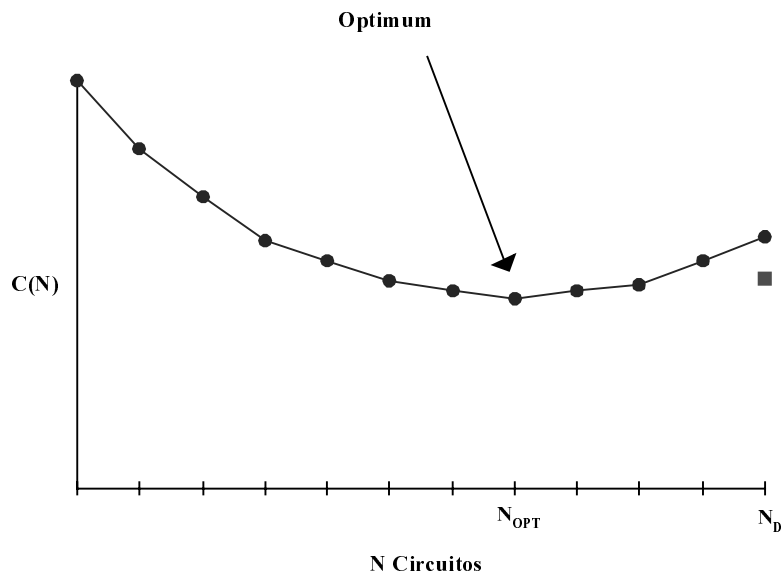
El divisor de la parte derecha de la ecuación de optimización,

$$c_1 \cdot \frac{\partial N_I}{\partial M_I} + c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_2}$$

obviamente el costo por erlang desbordando a las rutas tándem, que representaremos como  $C_T$ . Así, la ecuación de costo original se puede re-escribir como

$$C(N) = c \cdot N + m(N) \cdot C_T$$

La siguiente figura ilustra la expresión de costo para varios valores de  $N$ , para un tráfico ofrecido específico y  $C_T$ :



Los puntos marcados con ● corresponden a la ecuación de optimización anteriormente presentada, válida para  $N = 0, 1, 2, \dots, N_D$ , y el punto marcado con ■ corresponde al costo de proveer una ruta directa sin desbordamiento.

Entonces el procedimiento evidente a seguir consiste en calcular el valor de la expresión anterior para valores sucesivos de  $N$ , comenzando con  $N = 0$  hasta llegar a  $N_D$ , o al valor más bajo de  $C(N)$ .

Si el trayecto de desbordamiento tuviera más de las dos rutas supuestas en la configuración triangular precedente, entonces existirá el número correspondiente de términos  $C_T$  adicionales.

Para cualquier ruta en el trayecto de desbordamiento, se debe observar que

- si la ruta es final, es decir, sin posibilidades de desbordamiento, la derivada  $\frac{\partial N}{\partial M}$  se debe calcular para un *valor de congestión constante*;
- si la ruta tiene posibilidades de desbordamiento, la derivada  $\frac{\partial N}{\partial M}$  debe calcularse para una *media de tráfico de desbordamiento constante*.

Para mayores detalles, por favor ver capítulo 3.6.

### **Valores iniciales**

El proceso iterativo delineado en el capítulo 2.1 hace uso de los flujos de tráfico y cálculos de circuito de la iteración anterior cuando se va a optimizar cualquier ruta en particular. En la primera iteración dicha información no se encuentra todavía disponible y debe hacerse algún supuesto acerca de la *eficiencia* de las rutas en el trayecto de desbordamiento. Esto se puede lograr estableciendo el valor de la derivada en una constante encontrada empíricamente antes de comenzar la primera iteración; esto es  $\frac{\partial N}{\partial M} = 1.2$

### **2.5.5 Consideraciones sobre redes jerárquicas**

#### **Orden de los cálculos**

Debido a que una ruta sólo puede ser optimizada/dimensionada cuando se han calculado todas las otras rutas con tráfico desbordando hacia ella, es importante que el orden en el cual las rutas se traten sea estrictamente de acuerdo a la estructura jerárquica de la red y a las reglas de encaminamiento especificadas.

### Criterio de servicio

El grado de servicio requerido en la red puede determinarse antes de comenzar el cálculo, de una de las dos maneras siguientes:

- grado de servicio especificado para *rutas finales*;
- grado de servicio especificado para *casos de tráfico*.

En el segundo caso, el GOS (Grade of service = Grado de servicio) requerido para cualquier ruta final tendrá que establecerse de tal manera que la congestión total experimentada por cualquier tráfico usando esa ruta, no sea más grande que el valor especificado. Para asegurar esto, los valores GOS deben establecerse cuidadosamente, dependiendo de los resultados de los circuitos provistos en los niveles inferiores de la red y los subsiguientes valores de congestión y tráficos de desbordamiento. Como una ruta final puede cursar tráficos parciales de desbordamiento desde muchas rutas de nivel más bajo, el "peor" caso determinará el GOS a ser aplicado a la ruta final.

Antes de discutir cómo establecer los valores GOS para rutas de nivel más alto, consideremos primero cómo se calcula el grado de servicio total para un caso de tráfico dado.

La congestión total de cualquier caso de tráfico puede calcularse aproximadamente cuando se han calculado todos los tráficos de desbordamiento y circuitos en los trayectos de desbordamiento correspondientes.

En una ruta donde

- $M$  = media del tráfico ofrecido
- $V$  = varianza del tráfico ofrecido
- $B$  = congestión

un flujo de tráfico individual,  $i$ , con

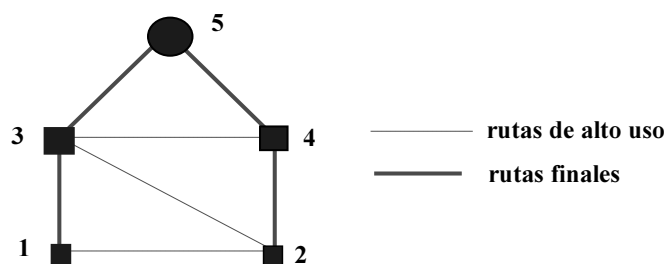
- $m_i$  = media de tráfico ofrecido
- $v_i$  = varianza de tráfico ofrecido

experimentará una congestión,  $B_i$ , que puede ser expresada aproximadamente como:

$$B_i \approx B \cdot \frac{\frac{v_i}{m_i}}{M}$$

Por tanto, para calcular la *congestión total* para cualquier caso de tráfico, se debe examinar cuidadosamente la secuencia de rutas de desbordamiento, y los términos correspondientes para congestión y tráficos de desbordamiento sumados/multiplicados de acuerdo a ello. El ejemplo siguiente ilustra el método:

Asúmase una configuración de red jerárquica de 3 niveles, cuyas rutas relevantes se muestran en esta figura:



Nos interesa encontrar el grado de servicio total para el caso de tráfico  $1 \rightarrow 2$ . Una llamada en esta ruta tiene cuatro posibles alternativas, esto es,

- $1 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

Para cualquiera de las rutas involucradas, el tráfico ofrecido ( $M, V$ ), la congestión ( $B$ ), y el tráfico de desbordamiento ( $m, v$ ) se asume que son conocidos. El grado de servicio total,  $T_{12}$ , puede entonces encontrarse de esta manera:

$$T_{12} = B_{12} \cdot \frac{v_{12}}{m_{12}} \cdot \left( \frac{B_{13}}{V_{13}/M_{13}} + \frac{T_{32}}{V_{32}/M_{32}} \right)$$

$$T_{32} = B_{32} \cdot \frac{v_{32}}{m_{32}} \cdot \left( \frac{T_{34}}{V_{34}/M_{34}} + \frac{B_{42}}{V_{42}/M_{42}} \right)$$

$$T_{34} = B_{34} \cdot \frac{v_{34}}{m_{34}} \cdot \left( \frac{B_{35}}{V_{35}/M_{35}} + \frac{B_{54}}{V_{54}/M_{54}} \right)$$

Asúmanse tráficos, circuitos, congestión y tráficos de desbordamiento como se muestran en la siguiente tabla:

Ruta	M	V	V/M	N	B	m	v	v/m
1 - 2	30.	30.	1.00	30	0.132	3.97	12.15	3.06
1 - 3	100.	150.	1.50	-	0.010	-	-	-
3 - 2	100.	160.	1.60	100	0.094	9.39	60.10	6.40
3 - 4	200.	300.	1.50	210	0.039	7.70	69.60	9.04
3 - 5	200.	400.	2.00	-	0.010	-	-	-
5 - 4	300.	500.	1.67	-	0.010	-	-	-
4 - 2	100.	200.	2.00	-	0.010	-	-	-

El grado de servicio total para el caso de tráfico 1 - 2 puede entonces calcularse:

$$T_{34} = 0.039 \cdot 9.04 \cdot (0.01/2 + 0.01/1.67) = 0.0039$$

$$T_{32} = 0.094 \cdot 6.4 \cdot (0.0039/1.5 + 0.01/2) = 0.0046$$

$$T_2 = 0.132 \cdot 3.06 \cdot (0.01/1.5 + 0.0046/1.6) = 0.0038$$

De modo similar, el caso de tráfico 1 - 5, para el que no hay rutas alternativas, experimentarán un grado de servicio total de

$$T_5 = B_3 \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{M_3}} + B_{35} \cdot \frac{1}{\frac{V_{35}}{M_{35}}} = \frac{0.01}{1.5} + \frac{0.01}{2} = 0.017$$

Como sabemos calcular el grado de servicio total experimentado por cualquier caso de tráfico desde  $v/m$ , y  $V/M$  y  $B$  para las rutas en el trayecto de desbordamiento, podemos establecer los valores adecuados para estos  $B$ , para que el grado de servicio total para todos los casos de tráfico esté dentro de los límites especificados.

En el ejemplo de arriba, consideramos que el grado de servicio total para el caso de tráfico 1 - 2,  $GOS_{12} = 0.01$ . Esto significa que

$$T_{12} \leq GOS_{12}$$

o

$$\left( \frac{B_1}{\frac{V_1}{M_1}} + \frac{T_2}{\frac{V_2}{M_2}} \right) \leq \frac{GOS_{12}}{B_{12} \cdot \frac{v_{12}}{m_{12}}}$$

o, con los valores usados antes,

$$\left( \frac{B_{13}}{1.5} + \frac{T_{32}}{1.6} \right) \leq \frac{0.01}{0.132 \cdot 3.06}$$

Asumiendo que los dos términos entre paréntesis son del mismo tamaño, obtenemos

$$B_{13} = \frac{1.5 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.132 \cdot 3.06} = 0.019$$

y

$$T_{32} = \frac{1.6 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.132 \cdot 3.06} = 0.020$$

De modo similar, encontramos que los valores de las otras rutas finales son

$$B_{13} = 0.019$$

$$B_{35} = 0.071$$

$$B_{54} = 0.059$$

$$B_{42} = 0.033$$

Sin embargo, hay también otros casos de tráfico a considerar, y, como se estipuló antes, el “peor” caso debe determinar el GOS en las rutas finales.

Si asumimos entonces el requerido  $GOS_{15} = 0.02$ , y hacemos cálculos similares, encontramos que  $GOS_{13}$  y  $GOS_{35}$  deben ser reducidos a

$$B_{13} = 0.015$$

$$B_{35} = 0.020$$

El mismo ejercicio se debe llevar a cabo para cualquier otro caso de tráfico, usando cualquiera de las rutas finales en su trayecto de desbordamiento, y los valores relevantes de  $B$  se establecerán para satisfacer todas las demandas GOS.

### 2.5.6 Horas Pico No-Coincidentes

Los diferentes flujos de tráfico en la red raramente tendrán su hora pico exactamente al mismo tiempo. Esto se cumple especialmente para redes internacionales, donde la diferencia horaria entre los países se convierte en un factor importante al determinar los perfiles de tráfico. De modo semejante, el tráfico para los abonados de negocios en las redes metropolitanas tendrá su pico en un tiempo diferente que el tráfico residencial. Se pueden lograr ahorros considerables en términos de circuitos si estos perfiles de tráfico se toman en cuenta en el dimensionamiento de la red entre centrales.

Los métodos de dimensionamiento y optimización presentados en las secciones precedentes de este capítulo son válidos para cierto punto de tiempo, como es la hora pico.

Para redes con horas pico no coincidentes (NCBH, Non-coincident busy hours), el procedimiento de dimensionamiento y optimización será algo más complicado, pues ahora tenemos que trabajar con *perfiles de tráfico* en vez de simples valores de tráfico, introduciendo así dentro de nuestro modelo de tráfico una nueva dimensión, como lo es el tiempo.

Las notaciones dadas al principio del Capítulo 2.5, excepto para  $N$  y  $k$ , serán vectores; por ejemplo:

$$A(t), M(t), \dots, B(t), t = 1, 2, \dots, T.$$

El supuesto es que durante un período de tiempo dado,  $t$ , podemos trabajar usando los métodos de cálculo de congestión descritos anteriormente. Esto significa que todas las fórmulas dadas en 2.5.1 y 2.5.2 se pueden usar; sólo tenemos que añadir el subíndice  $t$  a las variables  $A, M, V, m, v$  y  $B$ .

#### Dimensionamiento:

El tráfico ofrecido de una ruta, caracterizado por:

$$\left. \begin{array}{l} M(t) \\ V(t) \end{array} \right\} \quad t = 1, 2, \dots, K, T$$

puede ser dimensionado para un grado de servicio específico,  $B(t)$ , encontrando el tráfico que produce el más alto número de circuitos. Obviamente no es necesario investigar todos los puntos de tiempo en detalle, sino sólo aquellos con tráficos grandes.

### Optimización :

Considerando de nuevo el patrón de ruta triangular del capítulo 2.5.4 y añadiendo el parámetro de tiempo a los tráficos involucrados, la ecuación de optimización se convierte entonces en:

$$C(N) = c \cdot N + c_1 \cdot \Delta N_1 + c_2 \cdot \Delta N_2$$

donde

$$\Delta N_1 = \frac{\partial N_1}{\partial M_1} \cdot \left[ \max_t \{M_{10}(t) + m(N, t)\} - \max_t \{M_{10}(t)\} \right]$$

$$\Delta N_2 = \frac{\partial N_2}{\partial M_2} \cdot \left[ \max_t \{M_{20}(t) + m(N, t)\} - \max_t \{M_{20}(t)\} \right]$$

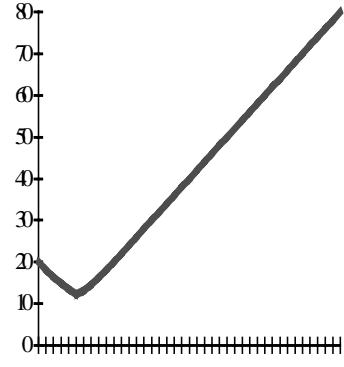
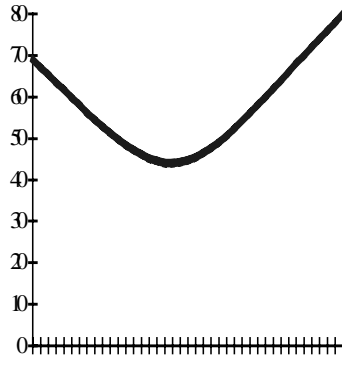
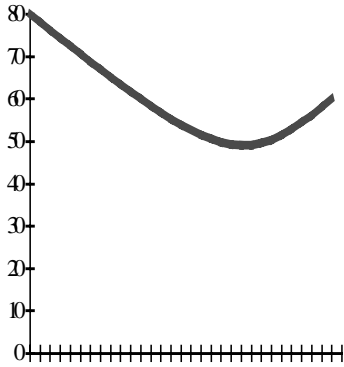
y  $M_{10}(t)$  = tráfico medio ofrecido a la ruta  $i-T$  al tiempo  $t$ , sin incluir el desbordamiento de tráfico de  $i-j$   
 $M_{20}(t)$  = igual que el anterior para la ruta  $T-j$

La derivada  $\frac{\partial N}{\partial M}$  se calcula en el caso de

- rutas de baja pérdida: con valor de congestión constante, y para el punto de tiempo,  $t$ , que determinó;  $N_1$
- rutas de alto uso: con media de tráfico de desbordamiento constante en el momento,  $t$ , con el valor más grande.

Como en el caso de horas pico coincidentes, el valor óptimo de  $N$  se encuentra comparando los valores de  $C(N)$  para  $N = 0, 1, 2, \dots, K, N_D$ .

Como una ilustración de la diferencia en el costo y el número de circuitos, comparemos las tres figuras siguientes usando el concepto NCBH (Non- coincident busy hours = Horas pico no coincidentes). A la izquierda el caso de BH coincidente; es decir, se ha usado el valor de tráfico de la hora pico para la ruta directa,  $i-j$ , y las rutas tándem,  $i-T$  y  $T-j$ . En los otros dos casos, el perfil de tráfico de las rutas tándem es el mismo, pero el pico de tráfico en la ruta directa coincide con los tráficos altos de las rutas tándem en la figura del centro, y coincide con los tráficos bajos de las rutas tándem en la figura de la derecha.

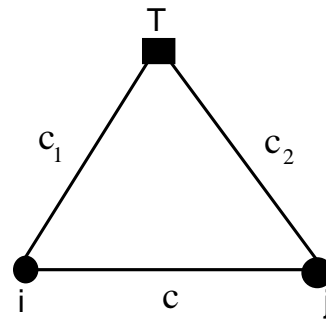


**Supuestos:**

$$c = 1$$

$$c_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial M_1} = 0.9$$

$$c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_2} = 1.1$$



		Tráficos en erlang en el tiempo $t$												
$t =$	1	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
i - j	40	20	30	40	5	5	10	5	5	10	20	30	40	
i - T	100	50	80	100	90	80	60	50	80	100	90	80	60	
T - j	100	50	100	90	80	75	70	50	100	90	80	75	70	
Resultados de optimización:	$N_{ij}=42$ $C(N)=49$	$N_{ij}=36$					$C(N)=44$	$N_{ij}=10$						$C(N)=12.3$



### 3.6 CALCULO DE LA DERIVADA, $\frac{\partial N}{\partial M}$

Cuando se dimensiona u optimiza el número de circuitos en una ruta, es también necesario evaluar la *eficiencia* de la ruta, esto es, la derivada parcial del número de circuitos con relación a la media del tráfico ofrecido,  $\frac{\partial N}{\partial M}$ . En la próxima iteración de los programas de planeamiento, estas derivadas se usarán para varios propósitos, que son:

- optimización de los límites del área de la central;
- optimización de rutas en los niveles más bajos de la jerarquía de la red;
- evaluación de cambios en el costo de la red de empalme cuando se introducen nuevas centrales;
- optimización de disponibilidades de rutas individuales desde centrales con disponibilidad restringida.

Para el caso general de tráfico no poissoniano, caracterizado por la media,  $M$ , y la varianza,  $V$ , y la disponibilidad restringida, descrita por una función de bloqueo dependiente del sistema,  $W_i$ , la congestión de ruta como una función de estos parámetros, se puede escribir como:

$$B(M, V, N, W)$$

donde  $N$  es el número de circuitos. Sin embargo, será más conveniente usar  $(M, V/M)$  en vez de  $(M, V)$  para describir el tráfico ofrecido; en las fórmulas de este capítulo esta relación se representará por  $\Theta$ . Para el cálculo de derivadas, se puede asumir que  $\Theta$  es aproximadamente constante. El uso de  $\Theta$  en vez de  $V$  facilita los cálculos necesarios, sin afectar significativamente la exactitud de los resultados. Así, la congestión de la ruta se representará

$$B(M, \Theta, N, W)$$

Se deben considerar dos casos: rutas con posibilidad de desbordamiento y rutas sin posibilidad de desbordamiento.

Para el caso de rutas directas de *baja pérdida* sin posibilidad de desbordamiento, la congestión de la ruta tiene cierto valor predefinido; en otras palabras:

$$B(M, \Theta, N, W) = \text{constante}$$

La derivación parcial de  $B$  con respecto a  $M$  da

$$\frac{\partial B}{\partial M} + \frac{\partial B}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial M} = 0$$

ó

$$\frac{\partial N}{\partial M} = - \frac{\frac{\partial B}{\partial M}}{\frac{\partial B}{\partial N}}$$

Para el caso de *rutas de alto uso*, esto es, rutas con posibilidad de desbordamiento, el tráfico de desbordamiento de la ruta debe considerarse constante preferentemente a la congestión, de modo que

$$m = M \cdot B(M, \Theta, N, W) = \text{constante}$$

En este caso, la derivación parcial con relación a  $M$  da

$$B + M \cdot \left( \frac{\partial B}{\partial M} + \frac{\partial B}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial M} \right) = 0$$

ó

$$\frac{\partial N}{\partial M} = - \frac{\frac{B}{M} + \frac{\partial B}{\partial M}}{\frac{\partial B}{\partial N}}$$

Entonces tenemos que encontrar expresiones adecuadas para  $\frac{\partial B}{\partial M}$  y  $\frac{\partial B}{\partial N}$  para los casos de

- disponibilidad total ( $\Theta = 1$  y  $\Theta > 1$ )
- disponibilidad restringida, tráfico de Poisson ( $\Theta = 1$ )
- disponibilidad restringida, tráfico degenerado ( $\Theta > 1$ )

### 3.6.1 Disponibilidad total

Ahora queremos encontrar las derivadas parciales  $\frac{\partial B}{\partial M}$  y  $\frac{\partial B}{\partial N}$  para la configuración siguiente:



Tal como en el capítulo 2.5.1: **Teoría de la Congestión, Disponibilidad Total, Rutas Alternativas**, esta configuración se reemplaza por



Los parámetros  $N^*$  y  $A^*$  de este “grupo equivalente” se pueden determinar del sistema de ecuación

$$\left. \begin{aligned} M &= A^* \cdot E_{N^*}(A^*) \\ \Theta &= 1 - M + \frac{A^*}{N^* + 1 - A^* + M} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.1)$$

La media del tráfico de desbordamiento desde la ruta alternativa se estima entonces como

$$m = A^* \cdot E_{N+N^*}(A^*)$$

La congestión,  $B$ , se puede escribir como:

$$B(M, \Theta, N) = \frac{m}{M} = \frac{E_{N+N^*}(A^*)}{E_{N^*}(A^*)} \quad (3.6.2)$$

y entonces,

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\partial B}{\partial N^*} \cdot \frac{\partial N^*}{\partial M} + \frac{\partial B}{\partial A^*} \cdot \frac{\partial A^*}{\partial M}$$

La derivación parcial de (3.6.1) con relación a  $M$  da

$$\frac{\partial A^*}{\partial M} \cdot \frac{M}{M + \Theta - I} + \frac{\partial N^*}{\partial M} \cdot \frac{\partial E_{N^*}(A^*)}{\partial N^*} \cdot A^* = I$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial M} \cdot \frac{M + \Theta}{M + \Theta - I} - \frac{\partial N^*}{\partial M} = I + \frac{A^*}{(M + \Theta - I)^2}$$

del cual  $\frac{\partial A^*}{\partial M}$  y  $\frac{\partial N^*}{\partial M}$  se pueden calcular.

De (3.6.2) obtenemos

$$\frac{\partial B}{\partial A^*} = B \cdot \left( \frac{N}{A^*} - E_{N^*}(A^*) + E_{N+N^*}(A^*) \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial N^*} = \frac{I}{E_{N^*}(A^*)} \cdot \left( \frac{\partial E_{N+N^*}(A^*)}{\partial(N^* + N)} - B \cdot \frac{\partial E_{N^*}(A^*)}{\partial N^*} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial N} = \frac{I}{E_{N^*}(A^*)} \cdot \frac{\partial E_{N+N^*}(A^*)}{\partial(N^* + N)}$$

Las derivadas restantes  $\frac{\partial E_{N^*}(A^*)}{\partial N^*}$  y  $\frac{\partial E_{N+N^*}(A^*)}{\partial(N^* + N)}$  se tratan en el capítulo 3.9.2: **Fórmula de Erlang para números no enteros de circuitos.**

### 3.6.2 Disponibilidad restringida, tráfico Poissoniano

Tal como se expuso en el capítulo 2.5.2, la congestión  $B(N, M)$  se puede escribir como

$$B(N, M) = \sum_{i=0}^N W_i \cdot P(i)$$

donde  $P(i)$  se puede determinar de las relaciones

$$\left. \begin{array}{l} P(i) \cdot M \cdot (1 - W_i) = P(i+1) \cdot (i+1) \\ \sum_{i=0}^N P(i) = 1 \end{array} \right\} \quad (i=0,1,2,\dots,N-1)$$

La derivación da

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{I}{M} \cdot \sum_{k=0}^N k \cdot W_k \cdot P(k) - B \cdot (1 - B)$$

No existe una fórmula explícita disponible para  $\frac{\partial B}{\partial N}$ ; una aproximación apropiada es

$$\frac{\partial B}{\partial N} \approx - \frac{B(N-1) - B(N+1)}{2}$$

### 3.6.3 Disponibilidad restringida, tráfico no poissoniano

No se dispone de fórmulas explícitas para este caso. Una aproximación similar a la usada en el capítulo 2.5.2 para tráficos de desbordamiento y circuitos, se ha encontrado adecuada para nuestras necesidades:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial M}\right) \approx \left(\frac{\partial N}{\partial M}\right)_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial M}\right)_3 - \left(\frac{\partial N}{\partial M}\right)_1$$

donde los subíndices indican los casos más simples, o sea:

1 : Disponibilidad total,  $\theta = 1$

2 : Disponibilidad total,  $\theta > 1$

3 : Disponibilidad restringida,  $\theta = 1$

### 3.7 CALCULO DEL GRUPO EQUIVALENTE DE WILKINSON

En algunos de los capítulos en los que tratamos sobre dimensionamiento y/u optimización de circuitos, se han usado los parámetros del Grupo Equivalente de Wilkinson,  $N^*$  y  $A^*$ . Estos parámetros se pueden encontrar resolviendo el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} M &= A^* \cdot E_{N^*}(A^*) \\ V &= M \cdot \left( I - M + \frac{A^*}{N^* + I - A^* + M} \right) \end{aligned} \right\}$$

para valores dados de  $M$  y  $V/M$  ( $M > 0$ ,  $V/M > 1$ ). Esto se puede hacer de la siguiente manera:

$N^*$  se expresa como una función de  $M$ ,  $V/M$  y  $A^*$ , es decir,

$$N^* = \frac{A^*}{V/M + M - I} + A^* - M - I$$

reduciendo así el problema a una variable independiente,  $A^*$ .

Podemos entonces usar el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación restante,

$$M = A^* \cdot E_{N^*}(A^*)$$

o

$$f(A^*) = M - A^* \cdot E_{N^*}(A^*) = 0$$

de la manera acostumbrada, o sea encontrando un valor adecuado de inicio para  $A^*$ ,  $A_0$ , y mejorándolo iterativamente por el uso de

$$A_{K+1} = A_K - \frac{f(A_K)}{f'(A_K)}$$

hasta que los valores resultantes estén lo suficientemente cerca de  $M$  y  $V/M$ .

Un valor adecuado de inicio para  $A^*$  ha sido dado por Y. Rapp como

$$A = V + 3 \cdot V / M \cdot (V / M - I)$$

Queda el cálculo de  $f'(A)$ , y obtenemos

$$-f'(A) = E_N(A) + A \cdot \left( \frac{\partial E_N(A)}{\partial A} + \frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial A} \right)$$

o

$$-f'(A) = E_N(A) \cdot (I + N - A + A \cdot E_N(A)) + A \cdot \frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \cdot \frac{V / M + M}{V / M + M - I}$$

Para el cálculo de  $\frac{\partial E_N(A)}{\partial N}$  ver el capítulo 3.9.2: **Fórmula de Erlang para un número no entero de circuitos**

**Consejo práctico:** para evitar problemas numéricos que puedan ocurrir por algunas combinaciones de  $M$  y  $V/M$ , es aconsejable asegurar la convergencia de este método guardando los límites inferiores y superiores de  $A$ , verificando contra estos límites y, si es necesario, usando la mitad de este intervalo para corregir  $A$  en caso que cayera fuera del intervalo.

### 3.8 FUNCIONES DE BLOQUEO

En un sistema de disponibilidad restringida, los trayectos de conexión se arreglan de modo tal que la llamada fracase aun cuando haya circuitos disponibles en el grupo llamado. Así, los arreglos conocidos como interconexiones graduales y sistemas de enlace, al igual que combinaciones de estos dos, generalmente se clasificarán como sistemas de disponibilidad restringida.

Las llamadas pueden desbordarse del grupo primario aun cuando tenga circuitos libres. Los desbordamientos se gobiernan por una *función de pérdida*,  $W_i$ , la cual se define como la probabilidad de que la llamada entrante sea rechazada, cuando hay  $i$  circuitos primarios ocupados.

La *función de pérdida* para un sistema dado depende claramente de la manera en que los trayectos de conexión hayan sido arreglados, y por lo tanto es más dependiente del tipo de equipo de conmutación usado. De esta forma, es necesario construir estas funciones de pérdida para cualquier tipo de equipo de conmutación que se encuentre en el planeamiento de una red específica y programar las rutinas necesarias.

A continuación hay un ejemplo de dicha función de pérdida para la Interconexión Gradual Ideal de Erlang.

*Interconexión Gradual Ideal de Erlang*

Utilizando el supuesto que las llamadas procedentes se distribuyen de forma aleatoria entre los circuitos de salida, Erlang llegó a su bien conocida fórmula

$$W_i = \frac{\binom{i}{K}}{\binom{N}{K}}$$

donde  $N$  es el número total de circuitos salientes y  $K$  es el número de circuitos disponibles de cada grupo de entrada.

El cálculo de los valores de  $W$  se debe hacer de acuerdo con la siguiente fórmula de iteración para evitar problemas numéricos:

$$W_i = 1$$

$$W_{i-1} = W_i \cdot \frac{i-K}{i} \quad \text{para } i = N, N-1, \dots, K$$

*Otros arreglos*

Para otros arreglos de los trayectos de conexión, especialmente para sistemas de enlace de dos o tres etapas, las fórmulas para  $W_i$  son mucho más complicadas. Se han desarrollado y programado esquemas de cálculo para algunos arreglos. Los “Estudios de Congestión en el Sistema de Teléfono con Facilidades de Desbordamiento” de Wallström describen varias de estas funciones.

### 3.9 FORMULA DE ERLANG

En la descripción de métodos para optimización y dimensionamiento de la red entre centrales hay varias referencias a la fórmula de Erlang, tanto para número de circuitos enteros como no enteros y las derivadas de esto con relación a los circuitos y/o el tráfico ofrecido. Este capítulo tiene que ver con problemas numéricos encontrados en este contexto y describe maneras de llegar a los valores numéricos de estas entidades para los parámetros dados.

#### 3.9.1 Fórmula de Erlang para número entero de circuitos

Para un número entero de circuitos,  $N$ , y una media de tráfico ofrecido,  $A$ , la fórmula de Erlang se escribe generalmente como

$$E_N(A) = \frac{A^N}{N!} \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}}$$

Esta notación es, sin embargo, poco adecuada para usarse en programas de computadoras, especialmente para valores mayores de  $N$ . Los cálculos separados para  $\frac{A^N}{N!}$  y la suma de dichos términos resultarán en valores tan grandes que el resultado será numéricamente inútil. Se puede demostrar muy fácilmente que  $E_N(A)$  se puede calcular iterativamente de la siguiente fórmula:

$$E_K(A) = \frac{A \cdot E_{K-1}(A)}{K + A \cdot E_{K-1}(A)}$$

con

$$E_0(A) = 1$$

La derivada parcial de  $E(A)$  respecto de  $A$  se encuentra que es

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial A} = E_N(A) \cdot \left( \frac{N}{A} - 1 + E_N(A) \right)$$

La derivada parcial de  $E(A)$  con relación a  $N$  no tiene significado matemático mientras se considere  $E(A)$  como definido sólo para valores enteros de  $N$ . En este caso podemos aproximar la derivada con una diferencia,

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \approx E_{N+1}(A) - E_N(A)$$

o

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \approx \frac{E_{N+1}(A) - E_{N-1}(A)}{2}$$

u otras expresiones usando diferencias de más alto orden.

Hay, sin embargo, una definición de  $E_N(A)$  para  $N$  real, la cual es

$$E_N(A) = \frac{A^N \cdot e^{-A}}{\int_A^\infty t^N \cdot e^{-t} dt}$$

La derivación de esta expresión con relación a  $N$  nos da

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial N} = -E_N(A) \cdot \Psi_{N+1}(A)$$

donde

$$\Psi_1(A) = \int_A^{\infty} e^{-t} \cdot t^{-1} dt$$

y puede encontrarse  $\Psi_{N+1}(A)$  iterativamente de

$$\Psi_{K+1}(A) = (1 - E_K(A)) \cdot \left( \Psi_K(A) + \frac{1}{K} \right) \quad (K = 1, 2, \dots, N)$$

El cálculo numérico de  $\Psi_1(A)$  puede ser llevado a cabo de acuerdo con una de las dos aproximaciones siguientes:

Aproximación I:

Para valores *pequeños* de  $A$  ( $0 < A < 5$ ):

$$\Psi_1(A) = e^{-A} \cdot \left( C + \log(A) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{-A^K}{K \cdot K!} \right)$$

donde  $C = 0.57721566490\dots$  es la constante de Euler

Para valores *más grandes* de  $A$  ( $15 < A$ ):

$$\Psi_1(A) = - \sum_{K=1}^n \frac{(-1)^K \cdot (K-1)!}{A^K} + R_n$$

donde  $R_n < \frac{n!}{A^{n+1}}$

Aproximación II, dando 8 decimales correctos:

Para  $A < 1$ :

$$\Psi_1(A) = e^{-A} \cdot \left( \left( \left( \left( \left( a_1 \cdot A - a_2 \right) \cdot A + a_3 \right) \cdot A - a_4 \right) \cdot A + a_5 \right) \cdot A - a_6 - \log(A) \right)$$

Para  $A > 1$ :

$$\Psi_1(A) = \frac{\left( \left( \left( \left( A + b_1 \right) \cdot A + b_2 \right) \cdot A + b_3 \right) \cdot A + b_4 \right)}{\left( \left( \left( \left( A + c_1 \right) \cdot A + c_2 \right) \cdot A + c_3 \right) \cdot A + c_4 \right) \cdot A}$$

donde

$a_1 = 0.00107857$	$b_1 = 8.5733287401$	$c_1 = 9.5733223454$
$a_2 = 0.00976004$	$b_2 = 18.059016973$	$c_2 = 25.6329561486$
$a_3 = 0.05519968$	$b_3 = 8.6347608925$	$c_3 = 21.0996530827$
$a_4 = 0.24991055$	$b_4 = 0.2677737343$	$c_4 = 3.9584969228$
$a_5 = 0.99999193$		
$a_6 = 0.57721566$		

### 3.9.2 Fórmula de Erlang para circuitos de número no entero

La definición de  $E_{N+x}(A)$  donde  $N$  es un entero no negativo y  $0 < x < 1$ , está dado por



$$E_{N+x}(A) = \frac{A^{N+x} \cdot e^{-A}}{\int_A^\infty t^{N+x} \cdot e^{-t} dt}$$

Inmediatamente se encuentra una formula de iteración, dando

$$E_{K+x}(A) = \frac{A \cdot E_{K+x-1}(A)}{K+x+A \cdot E_{K+x-1}(A)}$$

con

$$E_x(A) = \frac{A^x \cdot e^{-A}}{\int_A^\infty t^x \cdot e^{-t} dt}$$

Para  $A < 1$  la integral se puede volver a escribir como

$$\int_A^\infty t^x \cdot e^{-t} dt = \Gamma(x+1) - \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K \cdot A^{x+K+1}}{K! \cdot (x+1+K)}$$

donde

$$\Gamma(x+1) = \prod_{K=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{K}\right)^x}{1 + \frac{x}{K}}$$

Para  $A > 1$ , la convergencia de la suma puede no ser tan buena, y el algoritmo siguiente, llamado *expansión de fracciones continuas*, se debe usar para encontrar  $E_x(A)$  :

Paso 1: Fijar C = 1  
Fijar D = 1  
Fijar R = 1  
Fijar I = 0

Paso 2: Fijar B = I/2 - x para par I  
= (I+1)/2 para impar I

Fijar D = A/(A+B · D)

Fijar R = R\*(D - 1)

Fijar C = C + R

Paso 3: Probar si  $C \cdot |R| < \epsilon$  ; si es así, entonces  $E_x(A) = \frac{I}{C}$

$C \cdot |R| \geq \epsilon$  si no, fijar  $I = I+1$  , y continuar desde el paso 2

La derivada parcial de  $E_{+x}(A)$  respecto de A es, como antes,

$$\frac{\partial E_{N+x}(A)}{\partial A} = E_{N+x}(A) \cdot \left( \frac{N+x}{A} - 1 + E_{N+x}(A) \right)$$

La derivada parcial de  $E_{+x}(A)$  respecto de (N+x) es

$$\frac{\partial E_{N+x}(A)}{\partial(N+x)} = -E_{N+x}(A) \cdot \Psi_{N+x+1}(A)$$

donde  $\Psi_{N+x+1}(A)$  se puede calcular iterativamente de

$$\Psi_{K+x+1}(A) = (1 - E_{K+x}(A)) \cdot \left( \Psi_{K+x}(A) + \frac{1}{K+x} \right) \quad K = 1, 2, \dots, N$$

y, finalmente,  $\Psi_{x+1}(A)$  se puede obtener aproximadamente de

$$\Psi_{x+1}(A) \approx \frac{E_{x-\Delta}(A) - E_{x+\Delta}(A)}{2 \cdot \Delta \cdot E_x(A)}$$

siendo  $\Delta$  un valor pequeño ( $0 < \Delta < x$ ).