Dimensionnement et optimisation

du réseau de jonction

Mr. T. Fried, ITU

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

Contenu :

Ce document contient les suivants sous-titres de la documentation du logiciel PLANITU

2.4	Trafics
2.5	Dimensionnement/optimisation des routes Calcul du trafic du débordement
3.6	Calcul des dérivées, $\frac{\partial N}{\partial M}$
3.7	Calcul des paramètres du groupe équivalent de Wilkinson
3.8	Calcul des fonctions de blocage, W_i
3.9	Calcul de la formule d'Erlang pour le nombre de circuits entiers et non entiers, et le dérivées

2.4 TRAFICS

Avant de dimensionner et d'optimiser le groupe de circuits entre les centraux du réseau, une ***matrice de trafic*** entre ces centraux doit être élaborée. Ce chapitre décrit la méthode de calcul pour des types de réseaux considérés, c.à.d

- réseau local (rural, métropolitain)
- réseaux longue distance (national, régional)

2.4.1 Zones de trafic et abonnés

Pour les réseaux locaux, le calcul de trafic est basé sur le nombres d'abonnés par centre, les catégories d'abonnés et les zones de trafic.

Suppositions :

- la zone concernée doit être divisée en ***zones de trafic***, les abonnés appartenant à chaque zone sont supposé avoir des ***propriétés de trafic uniformes***, comme le trafic de départ et d'arrivée par abonné, et la ventilation du trafic pour les autres zones;
- le nombre d'abonnes pour chaque zone, *T*, est connu pour chaque centre, *E*, ils doivent être définis comme des données d'entrée, ou calculé dans l'optimisation des limites qui précède: **NSUB(E,T);**
- le nombre total d'abonnées appartenant à n'importe quelle zone de trafic, *T*, est connu; cela doit être calculé après les données d'entrée concernant la ***définition de la zone***, et la distribution des abonnées: $SUBTZ_T$
- le trafic total en provenance d'une zone de trafic, *T*, à destination d'une autre zone de trafic, *U*, est connu à partir des donnée d'entrée: A_{TU}

L'intérêt du trafic spécifique entre un abonné de la zone de trafic *T* et un abonné de zone de trafic *U* peut être exprimé comme

$$a(T,U) = \frac{A_{TU}}{SUBTZ_T \cdot SUBTZ_U}$$

Finalement, le trafic en provenance de chaque centre, *E*, vers un autre centre, *F*, peut être exprimé comme

$$Traffic(E,F) = \sum_{T,U} [NSUB(E,T) \cdot NSUB(F,U) \cdot a(T,U)]$$

2.4.2 Matrice de trafic

Pour des réseaux longue distance, ou pour les réseaux locaux où les limites des zones d'influences ne sont pas sujet d'étude pour le programme, la matrice de trafic est donnée, et définie l'intensité de trafic entre chaque paire de centres. Pour les sous centre, unité de raccordement d'abonnés distants (URAD), etc, le trafic total départ et arrivée peut être spécifié pour dimensionner les routes vers les centres de rattachement.

Le trafic donné dans cette matrice est le trafic de l'heure chargée.

Dans le cas ***où les heures chargées ne coïncident pas***, la matrice de trafic doit contenir le volume du trafic quotidien en Erlang heures, et l'information sur le profil de trafic pertinent doit être fourni. La valeur profile du trafic pour chaque moment donné, *t*, est donc trouvée par une multiplication du trafic total par la valeur profile du trafic pour *t*, c.à.d.

$$Trafic(E,F,t) = A(E,F) \cdot PROF(E,F,t)$$

Il n'est pas nécessaire de définir le profil du trafic spécifique par chaque cas particulier du trafic. Les centraux doivent être groupés en catégories, et le profil du trafic défini entre les catégories plutôt qu'entre les centres.

Pour les réseaux local et national, ce groupe de centraux pouvait probablement dépendre du pourcentage des catégories d'abonnés, tel que les résidentiels, professionnels, services publics, PABX, etc; comme les habitudes peuvent être mesurées ou estimées, le profil pour un "mélange" de catégories peut être trouvé.

Pour le réseau international, les profiles doivent plutôt dépendre de la différence du temps (décalage horaire) entre les pays concernés, et pour chaque relation spécial entre les pays.

2.5 DIMENSIONNEMENT ET OPTIMISATION DES ROUTES
CALCUL DU TRAFIC DU DEBORDEMENT

Ce chapitre traite la tâche de fournissement de circuits entre les différents centres du réseau de façon à ce que le coût du débordement du réseau soit minimal, et ce en tenant compte de

- la qualité de service désirée;
- les propriétés du trafic offert;
- les caractéristiques technique des équipements de commutation;
- le coûts des équipement de commutation et de transmission.

Ce chapitre décrit la solution mathématique du dimensionnement et d'optimisation, pendant que les problèmes numériques qui restent doivent être conclus au chapitre 3.5.

Les notations suivantes devraient être utilisées dans ce chapitre:

N = nombre de circuits dans le chemin
k = disponibilité, ou le nombre de sortie vers le chemins par unité de sélecteur de groupe
A = moyenne = variance du trafic poissonnien
M = moyenne du trafic offert au chemin de débordement
V = variance du trafic offert au chemin de débordement
m = moyenne du trafic de débordement de chemin
v = variance du trafic de débordement de chemin
B = m/M = la congestion dans le chemin.

2.5.1 Théorie de congestion disponibilité totale

<u>Chemin primaire</u>

Supposons un trafic offert poissonnien, la moyenne et la variance du trafic à partir du chemin direct sont données par la formule de Wilkinson:

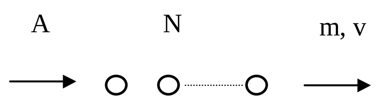
$$m = A \cdot E_N(A)$$

$$v = m \cdot \left(1 - m + \frac{A}{N + 1 - A + m} \right)$$

où $E_N(A)$ est la formule d'Erlang avec perte

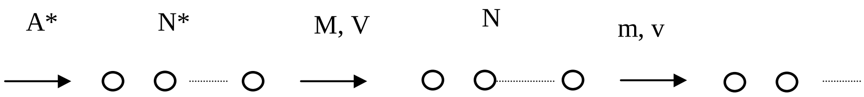
$$E_N(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

La figure qui suit illustre le modèle de Wilkinson pour les chemins primaires:



Chemins de débordement

Le trafic offert de la moyenne M et de la variance V, est substitué par le trafic égal à la moyenne est la variance d'un trafic poissonnier offert à un groupe à accessibilité totale:



Les paramètres N^* et A^* de ce "groupe équivalent" peuvent être déterminés à partir du système d'équations

$$M = A^* \cdot E_{N^*}(A^*)$$

$$V = M \cdot \left(1 - M + \frac{A^*}{N^* + 1 - A^* + M} \right)$$

Voir chapitre 3.7 pour les méthodes qui déterminent N^* et A^*.

La moyenne et la variance du trafic de débordement du chemin de débordement sont donc estimés comme

$$m = A^* \cdot E_{N+N^*}(A^*)$$

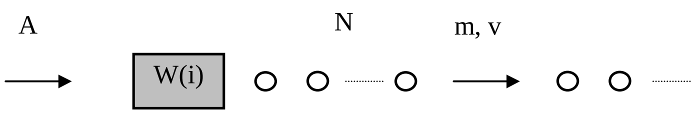
$$v = m \cdot \left(1 - m + \frac{A^*}{N + N^* + 1 - A^* + m} \right)$$

2.5.2 Théorie de congestion Disponibilité restreinte

Le problème de congestion dans les chemins à disponibilitée restreinte sont résolus par l'introduction de la *fonction de perte*, W_i, dénotant la probabilité conditionnelle d'un appel débordant d'un chemin, étant donnée que précisément ***i*** circuits sont occupés quand l'appel arrive. W_i, est de décrire les propriétés principale du multiplexage gradué actuel et/ou système de liaison. Des moments du débordement du trafic sont dérivés à partir des équations d'états d'une fonction de probabilité arbitraire W_i,. L'exemple d'une telle fonction est montré au chapitre 3.8.

Route primaire

Le schéma de calcul pour les routes primaires est illustré dans la figure qui suit; la boite devant la route indique la disponibilité restreinte.



La moyenne et la variance du trafic de débordement peuvent être écrit comme

$$m = A \cdot \sum_{i=0}^{N} W_i \cdot P(i)$$

$$v = m - m^2 + A \cdot \sum_{i=0}^{N} W_i \cdot Q(i)$$

où $P(i)$ peut être déterminé à partir des relations

$$P(i)\cdot A\cdot(1-W_i)=P(i+1)\cdot(i+1) \qquad \text{pour } i = 0, 1, 2,...., N-1$$

$$\sum_{i=0}^{N} P(i)=1$$

et $Q(i)$ peut être déterminé à partir des relations

$$Q(N-1)\cdot A\cdot(1-W_{N-1})=Q(N)\cdot(N+1)-P(N)\cdot A\cdot W_N$$

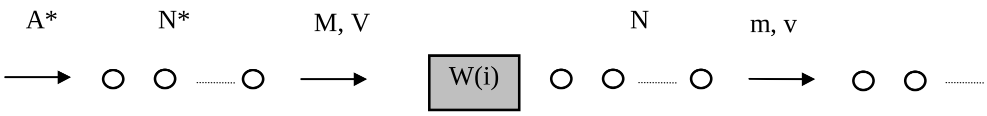
$$Q(i)\cdot A\cdot(1-W_i)=Q(i+1)\cdot[i+2+A\cdot(1-W_{i+1})]- \\ -Q(i+2)\cdot(i+2)-P(i+1)\cdot A\cdot W_{i+1} \qquad \text{pour i = N-2,N-3,....,0}$$

$$\sum_{i=0}^{N} Q(i)=m$$

Voir chapitre 3.5 pour des considération numériques de ces calculs.

<u>Route de débordement</u>

Le “groupe équivalent “, (N^*, A^*) , correspond à la moyenne et la variance du trafic offert est déterminé comme montré dans le cas d’accessibilité totale. Le schémas substitué dans la figure est détenu:



La solution “exacte” donnée par Wallström est, malheureusement, très compliquée dans sa pratique dans les programmes de planification des réseaux.

Pour calculer les moment demandés du trafic offert on utilise les solutions *approximatives* qui ont été composées avec la solution “exacte” et les simulations étendues, qui ont donné satisfaction. Deux approximations sont écrites ci-dessous.

Approximation I : Les moments demandés sont construits à partir des moments qui correspondent aux cas simples décrit ci dessous. On peut donc écrire

$$m = m_2 + m_3 - m_1$$

$$\frac{v}{m}=\frac{v_2}{m_2}+\frac{v_3}{m_3}-\frac{v_1}{m_1}$$

où les souscrits indiquent les cases simples

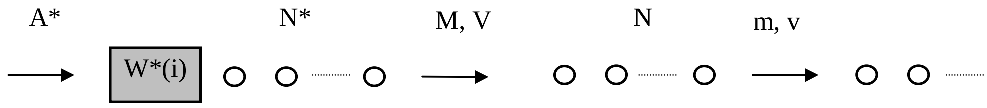
1 : Accessibilité totale, routes primaire
2 : Accessibilité totale, chemins de débordement
3 : Accessibilité restreinte, route primaire

Pour le dimensionnement des routes pour une qualité des service donnée, l’approximation correspondante devait être:

$$N = N_2 + N_3 - N_1$$

L'approximation de N est acceptable pour des petites valeurs de B, ($B < 0.05$), alors que l'approximation de m et de v est bonne pour les valeurs supérieures de B ($B > 0.15$).

Approximation II : Ici le schémas de calcul montré ci dessous est changé directement pour donner la figuration qui suit:



où $W_i^* = 0$ pour $i = 0,1,2,\ldots,N^* - 1$

$W_i^* = W_{i-N^*}$ pour $i = N^*, N^* + 1, \ldots, N^* + N$

et W_i est calculés par la méthode habituelle.

Maintenant $P(i)$, $Q(i)$, m et v peuvent être calculées comme décrit précédemment, utilisant ($N^i + N$) et A^i au lieu de A et N.

2.5.3 Dimensionnement

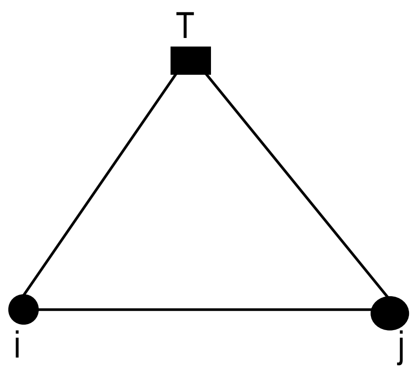
Les routes entre centraux peuvent maintenant être dimensionnées tout en se basant sur les formules et méthodes données ci-dessous.

Comme la congestion $B(N)$ largement *décroît* par l'*accroissement* de N, commençant par $B(N) = 1$ pour $N = 0$, et $B(N) \to 0$ pour $N \to \infty$, la méthode qui se suggère elle même est de commencer par une valeur appropriée de N, et par la suite accroître N en étapes appropriées jusqu'à ce que le résultat $B(N)$ devient petit ou égal à la valeur pré-décrite, B. Pour les détailles de calcul, considérant des problèmes numériques qui peuvent se présenter pour des valeurs larges de N, voir chapitre 3.5.

2.5.4 Optimisation des circuits sur les routes avec débordement

Il est pratiquement impossible d'optimiser toutes les routes dans un réseau à acheminement alternative simultanément, pour cela on a recours à la sous optimisation, c-à-d traiter uniquement une route particulier, tout en supposant que le reste du réseau est déjà optimisé et dimensionné. Commençant par des solutions approximatives, on peut donc arrivés itérativement au coût optimal par le traitement des routes individuellement, en utilisant les résultats précédants pour les autres routes dans le réseau.

Considérons la configuration simple des trois centres montrés ci-dessous:



Les deux centres, i et j, sont dans le niveau le plus bas dans une structure hiérarchique du réseau, et un autre centre, T, appelé le centre tandem ou de transit, sur le niveau le plus haut.

Considérons le cas du trafic de $i \to j$, il y a trois possibilités d'acheminer le trafic, c.à.d.

- tout le trafic est écoulé sur la route de i à j; on dénote ce cas comme **D** pour l'acheminement direct

- tout le trafic est écoulé via le centre de transit, T ; on dénote ce cas comme **T**

- une partie du trafic est écoulée dans le chemin i -> j , et le reste du trafic déborde sur la route $i \rightarrow T \rightarrow j$. On dénote ce cas par **H** pour les chemins débordants.

C'est le troisième cas qui nous intéresse ici, en particulier la question c'est quelle proportion du trafic devait être écoulée dans le faisceau direct et les chemins de débordement respectivement. Comme nous sommes intéressés à l'**optimisation**, la question alors devait être "quelle proportion devait résulter au coût minimum pour satisfaire la demande du trafic de *i* vers *j* pour des coûts données ainsi qu'une qualité de service?".

Pour le modèle triangulaire simple d'acheminement montré ci haut, les donnés suivantes sont supposées être connues:

M, V	moyenne et variance pour le trafic offert au chemin $i \rightarrow j$
M_{10}, V_{10}	moyenne et variance du trafic offert au chemin $i \rightarrow T$, ne contenant pas le trafic de débordement du chemin $i \rightarrow j$
M_{20}, V_{20}	idem pour la route $T \rightarrow j$
c, c_1, c_2	coût d'un circuit additionnel, respectivement pour routes $i \rightarrow j$, $i \rightarrow T$, et $T \rightarrow j$.

Si on dénote la moyenne et la variance du trafic de débordement du chemin $i \rightarrow j$ comme *m(N)* et *v(N)*, où *N* signifie le nombre de circuits dans le chemin $i \rightarrow j$, on aura le trafic offert au chemin de débordement connue

$$M_1 = M_{10} + m(N) \qquad\qquad M\ \ = M_{\ 0} + m(N)$$

$$V_1 = V_{10} + v(N) \qquad\qquad V_2 = V_{20} + v(N)$$

On veut déterminer *N* qui minimise le coût résultant, c-à-d on aura à minimiser la fonction du coût

$$C(N) = c \cdot N + c_1 \cdot N_1 + c_2 \cdot N_2$$

avec une considération à *N*. N_1 et N_2 sont des circuits dans les chemins de débordement.

Comme la qualité de service pour le faisceau de débordement est supposée être connue, N_1 et N_2 sont fonction de *N*. Pour trouver le minimum de la fonction coût on doit mettre sa dérivée par rapport à *N* égale à zéro.

On a

$$c + c_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N} + c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N} = 0$$

A partir de cette relation, la valeur de *N* peut alors être trouvée comme suit:

Pour le premier faisceau de débordement on sait que, pour une qualité de service donnée,

$$N_1 = N_1(M_1, V_1)$$

ou, autrement, pour $\Theta_1 = \dfrac{V_1}{M_1}$,

$$N_1 = N_1(M_1, \Theta_1)$$

On peut donc écrie

$$\frac{\partial N_1}{\partial N} = \frac{\partial N_1}{\partial M_1} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial N} + \frac{\partial N_1}{\partial \Theta_1} \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial N}$$

A partir de

$$M_1 = M_{10} + m \quad \text{et} \quad \Theta_1 = \frac{V_{10} + v}{M_{10} + m}$$

on trouve

$$\frac{\partial M_1}{\partial N} = \frac{\partial m}{\partial N} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial N} = \frac{\frac{\partial v}{\partial N} - \Theta_1 \cdot \frac{\partial m}{\partial N}}{M_1}$$

Comme la seconde expression est souvent petite, on aura approximativement

$$\frac{\partial N_1}{\partial N} \approx \frac{\partial N_1}{\partial M_1} \cdot \frac{\partial m}{\partial N} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_2}{\partial N} \approx \frac{\partial N_2}{\partial M_2} \cdot \frac{\partial m}{\partial N}$$

Finalement, si on insère ces dérivées dans la dérivée de la fonction coût, on obtient

$$-\frac{\partial m}{\partial N} = \frac{c}{c_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial M_1} + c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_2}}$$

Les dérivées $\frac{\partial N_1}{\partial M_1}$ et $\frac{\partial N_2}{\partial M_2}$ peuvent être calculées comme montré dans le chapitre 3.6, et sont *constants* durant la sous-optimisation du chemin sous les considération; ainsi sont c, c_1 et c . Le problème d'optimisation est alors réduit pour trouver la valeur de *N* pour cela

$$-\frac{\partial m}{\partial N} = \text{constante}$$

Même si cette expression rend facile l'optimum de *N* pour les routes avec accessibilité totale, pour les routes à accessibilité restreinte (p.e. chemin de multiplexage gradué) les dérivées ne peuvent pas être trouvées facilement. On aura donc....

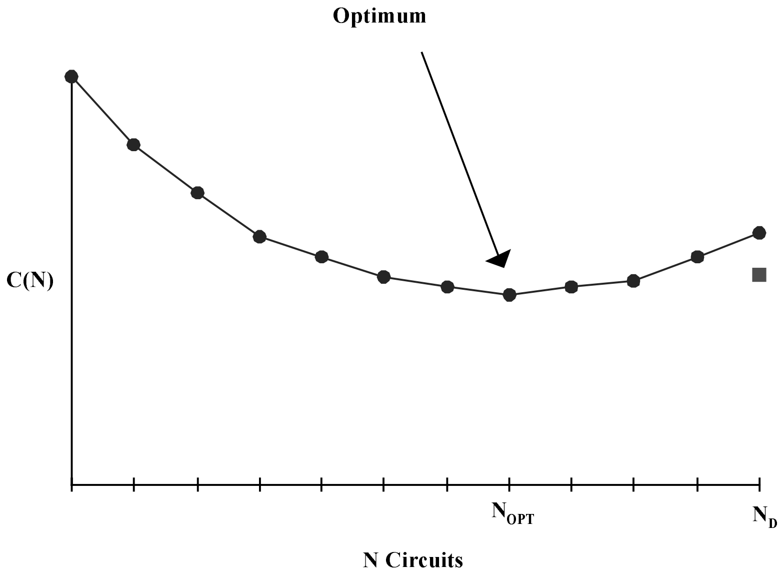
Le dénominateur du second terme de l'équation d'optimisation,

$$c_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial M_1} + c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_2}$$

est le coût par erlang débordant sur le chemin de transit qu'on peut dénoter comme C_T. L'équation originale du coût peut être écrite comme

$$C(N) = c \cdot N + m(N) \cdot C_T$$

La figure ci-dessous illustre l'expression du coût pour les différentes valeurs de *N*, pour un trafic offert spécifique et un C_T :



Les points marqués par • correspondent à l'équation d'optimisation ci-dessous, valable pour $N = 0,1,2,...,N_D$, et le point marqué ■ correspond au coût d'avoir un chemin direct sans débordement.

Alors, La procédure à suivre est de calculer la valeur de l'expression ci-dessous pour les valeurs successives de N, commençant par $N=0$ jusqu'à ce qu'on rencontre N_D, ou la plus petite valeur de **C**(N).

Si le chemin de débordement a plus que deux routes, on aura le nombre correspondent de C_T-termes additionnel.

Pour chaque route du chemin de débordement, il devait être observé que

- si la route est finale (ou de dernier choix), c-à-d sans possibilité de débordement, la dérivée $\frac{\partial N}{\partial M}$ devait être calculée pour une *valeur de congestion constante*;
- si les routes ont la possibilité de débordement, la dérivée $\frac{\partial N}{\partial M}$ devait être calculée pour une *moyenne du trafic de débordement constante*.

Pour plus de détaille voir chapitre 3.6.

<u>Valeurs initiales</u>

Le processus itératif vu au chapitre 2.1 tient compte du calcul des flux de trafic et circuits de l'itération précédente en cours de l'optimisation de chaque route particulière. A la 1ère itération, de telles informations ne sont pas encore disponibles, et quelques supposions concernant *l'efficacité* des toutes dans le chemin de débordement devraient être faites. Cela peut être accompli pour mettre la valeur des dérivées à la constante empirique trouvée, avant de commencer la 1ère itération c-à-d $\frac{\partial N}{\partial M} = 1.2$

2.5.5 Considération de la hiérarchie des réseaux

<u>Ordre de calcul</u>

Comme la route peut être optimisée/dimensionnée seulement quand toutes les autre routes avec le trafic débordant à cette route a été calculé, il est important que l'ordre dans chaque route est traité conformément à la structure d'un réseau hiérarchique, et des lois d'acheminement spécifiques.

<u>Critères de service</u>

La qualité de service demandée dans le réseau peut être déterminée avant de commencer les calculs par l'une des deux méthodes, c - à - d

- qualité de service (QS) spécifique pour les *routes finales*;

- qualité de service spécifique pour les *cas de trafic*.

Dans le second cas, la QS demandée pour chaque route finale devait donc être, dans de telles méthodes, que la congestion totale expérimentée par utilisant cette route ne devait pas être plus large que la valeur spécifique. Pour répondre à ça, la valeur de la QS doit être attentivement calculée avec dépendance des circuits données dans les niveaux les plus bas du réseau et de la valeur de congestion et du trafic de débordement. Comme la route finale peut écouler une partie du trafic débordant des chemins de 1er choix, le "pire" des cas doit déterminer la QS à appliquer pour la route finale.

Avant de discuter comment choisir les valeurs de la QS pour les routes du niveau supérieur, considérant d'abord comment la qualité de service pour un cas de trafic donné est calculée.

La congestion totale pour chaque cas de trafic peut être calculée approximativement quand tout le trafic de débordement et les circuits sur le chemin de débordement concerné ont été calculés.

Sur la route où

M = moyenne de trafic offert
V = variance de trafic offert
B = congestion

le flux du trafic individuel, i, avec

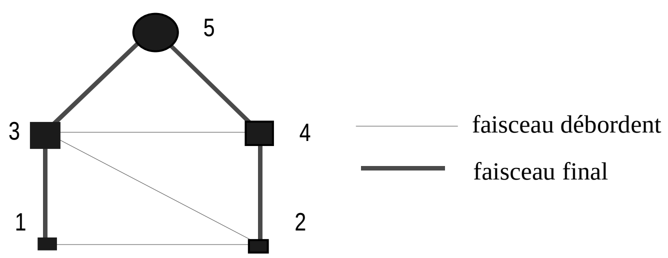
m_i = moyenne du trafic offert
v_i = variance du trafic offert

va connaître une congestion, B_i , qui peut être approximativement exprimée comme

$$B_i \approx B \cdot \frac{\frac{v_i}{m_i}}{\frac{V}{M}}$$

Pour calculer la *congestion totale* pour n'importe quel cas du trafic, la séquence des routes de débordement doit être attentivement examinée, et les termes correspondants pour la congestion et le trafic de débordement ajouté/multipliés en conséquence. L'exemple en bas illustre la méthode.

Supposons la configuration d'un réseau hiérarchique à trois niveaux. Les routes sont montrés dans cette figure comme suit:



On est intéressé de trouver la qualité de service totale pour les cas du trafic $1 \rightarrow 2$. Un appel offert à cette route a 4 possibilités, c-à-d

$1 \rightarrow 2$ $\quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ $\quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ $\quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

Pour chacune de routes, le trafic offert (M,V), la congestion (B) et le trafic de débordement (m, v) sont supposés être connus. La QS totale, T_{12} , peut donc être trouvée comme suit:

$$T_{12} = B_{12} \cdot \frac{v_{12}}{m_{12}} \cdot \left(\frac{B_{13}}{V_{13} / M_{13}} + \frac{T_{32}}{V_{32} / M_{32}} \right)$$

$$T_{32} = B_{32} \cdot \frac{v_{32}}{m_{32}} \cdot (\frac{T_{34}}{V_{34} / M_{34}} + \frac{B_{42}}{V_{42} / M_{42}})$$

$$T_{34} = B_{34} \cdot \frac{v_{34}}{m_{34}} \cdot (\frac{B_{35}}{V_{35} / M_{35}} + \frac{B_{54}}{V_{54} / M_{54}})$$

Supposons les trafics, les circuits, la congestion et le trafic débordant comme montré dans le tableau suivant:

Route	M	V	V/M	N	B	m	v	v/m
1 - 2	30.	30.	1.00	30	0.132	3.97	12.15	3.06
1 - 3	100.	150.	1.50	-	0.010	-	-	-
3 - 2	100.	160.	1.60	100	0.094	9.39	60.10	6.40
3 - 4	200.	300.	1.50	210	0.039	7.70	69.60	9.04
3 - 5	200.	400.	2.00	-	0.010	-	-	-
5 - 4	300.	500.	1.67	-	0.010	-	-	-
4 - 2	100.	200.	2.00	-	0.010	-	-	-

La qualité de service totale pour le cas de trafic 1 - 2 peut donc être calculée:

$$T_{34} = 0.039 \cdot 9.04 \cdot (0.01 / 2 + 0.01 / 1.67) = 0.0039$$

$$T_{32} = 0.094 \cdot 6.4 \cdot (0.0039 / 1.5 + 0.01 / 2) = 0.0046$$

$$T_{12} = 0.132 \cdot 3.06 \cdot (0.01 / 1.5 + 0.0046 / 1.6) = 0.0038$$

De même, le cas du trafic 1 - 5, pour le quel il n’y a pas de route alternative, donne la qualité de service totale comme

$$T_{15} = B_{13} \cdot \frac{1}{\frac{V_{13}}{M_{13}}} + B_{35} \cdot \frac{1}{\frac{V_{35}}{M_{35}}} = \frac{0.01}{1.5} + \frac{0.01}{2.} = 0.017$$

Comme on sait maintenant comment calculer la qualité de service totale expérimentée par n’importe quel cas de trafic à partir de *v/m*, et *V/M* et *B* pour les routes dans le chemin de débordement, on peut mettre les valeurs propres pour ces *B* pour que la qualité de service totale pour les différent cas de trafic soit à l’intérieur des limites spécifiées.

Dans l’exemple ci-dessous, on considère que la qualité de service totale exigée pour les cas de trafic 1 - 2, $GOS_{12} = 0.01$. Cela veut dire que

$$T_{12} \leq GOS_{12}$$

ou

$$\left(\frac{B_{13}}{\frac{V_{13}}{M_{13}}} + \frac{T_{32}}{\frac{V_{32}}{M_{32}}} \right) \leq \frac{GOS_{12}}{B_{12} \cdot \frac{v_{12}}{m_{12}}}$$

ou, avec les valeurs utilisées auparavant,

$$\left(\frac{B_{13}}{1.5} + \frac{T_{32}}{1.6} \right) \leq \frac{0.01}{0.132 \cdot 3.06}$$

Supposons que les deux termes entre parenthèses sont de la même taille, on aura

$$B_{13} = \frac{1.5 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.132 \cdot 3.06} = 0.019$$

et

$$T_{32} = \frac{1.6 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.132 \cdot 3.06} = 0.020$$

Dans le cas similaire, les valeurs pour d'autres routes de dernier choix sont trouvés

$$B_{13} = 0.019$$
$$B_{35} = 0.071$$
$$B_{54} = 0.059$$
$$B_{42} = 0.033$$

Cependant, il y aura d'autres cas de trafic à prendre en considération, et, comme signalé avant, le "pire" des cas devrait déterminer la QS pour les routes finales.

Si on suppose donc la QS exigée $QS_{15} = 0.02$, et faire les mêmes calculs, on trouve que la QS_{13} et QS_{35} doivent être réduites à

$$B_{13} = 0.015$$
$$B_{35} = 0.020$$

Le même exercice devrait donc être exécuté pour n'importe quel autre cas de trafic utilisant n'importe quelle route finale dans son chemin de débordent, et la valeur *B* devait être choisie de façon à satisfaire toutes les demandes de la QS.

2.5.6 La non-coïncidence des heures chargées

Plusieurs flux de trafic dans le réseau ont rarement leur heure chargée au même temps. Il est spécialement constaté au réseau international où la différence de temps entre les pays devient un facteur important dans la détermination du profil du trafic. D'une manière similaire, le trafic des abonnés professionnels dans les réseaux métropolitains devrait avoir son sommet au différents moments que le trafic résidentiel.

Les méthodes de dimensionnement et d'optimisation présentées dans les sections précédentes de ce chapitre, sont valables pour un certain point de temps, c.à.d. l'heure chargée.

Pour les réseaux où les heures chargées ne coïncident pas (NCBH), les procédures de dimensionnement et d'optimisation devraient être quelque peu compliquées comme on a à faire aux profils du trafic. Cela introduit une nouvelle dimension, qui est le temps, dans le modèle de trafic.

La notation donnée au début du chapitre 2.5 devait, sauf pour *N* et *k*, être vecteurs, c-à-dire

$$A(t),\ M(t),\ldots,\ B(t),\ t = 1, 2,\ldots\ T.$$

La supposition est que, durant une période de temps donnée, *t*, on peut travailler en utilisant les méthodes de calcul de congestion décrites précédemment. Cela veut dire que toutes les formules données en 2.5.1 et 2.5.2 peuvent être utilisées; on aura seulement à coller le souscrit *t* aux variables *A*, *M*, *V*, *m*, *v*, et *B*.

Dimensionnement

Trafic offert à la route est caractérisé par

$$\left.\begin{matrix} M(t) \\ V(t) \end{matrix}\right\} \quad t = 1,2,\ldots T$$

La route peut être dimensionnée pour une qualité de service spécifiée, *B(t)*, par la recherche du trafic qui laissant le plus grand nombre de circuits. Il n'est pas nécessaire d'étudier tous les points du temps en détaille, mais seulement ceux qui ont un grand trafic.

Optimisation :

Considérons à nouveau, le modèle de l’acheminement triangulaire du chapitre 2.5.4, et ajoutons le paramètre temps au trafic concerné, l’équation d’optimisation devient donc

$$C(N) = c \cdot N + c_1 \cdot \Delta N_1 + c_2 \cdot \Delta N_2$$

où

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial M} \cdot \left[max_t \left\{ M_0(t) + m(N,t) \right\} - max_t \left\{ M_0(t) \right\} \right]$$

$$\Delta N_2 = \frac{\partial N_2}{\partial M_2} \cdot \left[max_t \left\{ M_{20}(t) + m(N,t) \right\} - max_t \left\{ M_{20}(t) \right\} \right]$$

et $M_{10}(t)$ = trafic moyen offert à la route *i-T* au temps *t*, non compris le trafic de débordement de *i-j*
$M_{20}(t)$ = idem pour la route *T-j*

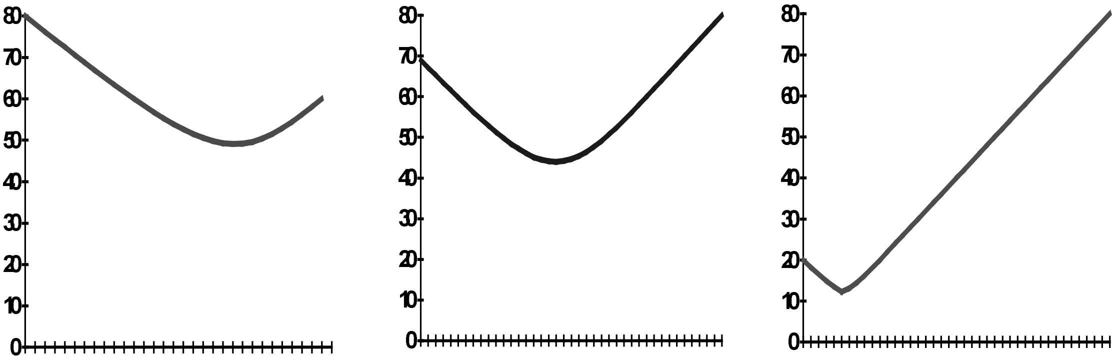
La dérivée $\frac{\partial N}{\partial M}$ est calculée dans le cas de

- routes avec peut de perte : avec la valeur de congestion constante, et pour le point de temps, *t*, qui détermine N_1;

- routes avec débordement : avec moyen de trafic de débordement constante pour le point de temps, *t*, avec la valeur la plus grande.

Comme le cas des coïncidences des heures chargées, la valeur optimale de N est trouvée par comparaisons des valeurs de **C**(N) pour $N = 0,1,2,\ldots, N_D$

Comme dans l’illustration des différences dans les coûts, et nombre de circuits, utilisant le concept de NCBH, comparer le faisceau direct, *i-j*, et les routes de transit, *i-T* et *T-j*. Dans les deux autres cas, les profil du trafic dans les routes tandem sont les mêmes, mais le sommet du trafic dans le faisceau direct, coïncide avec les trafic élevés dans les routes tandems, dans la figure du centre, et coïncide avec les faibles trafic des routes tandems dans la figure de droite.

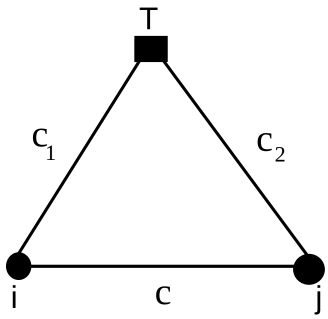


Supposition :

$$c = 1$$

$$c_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial M_1} = 0.9$$

$$c_2 \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_2} = 1.1$$



	Le trafic en erlang au temps t												
t =	1	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
i - j	40	20	30	40	5	5	10	5	5	10	20	30	40
i - T	100	50	80	100	90	80	60	50	80	100	90	80	60
T - j	100	50	100	90	80	75	70	50	100	90	80	75	70
Résultats de l'optimisation:	**N_{ij}=42 C(N)=49**	**N_{ij}= 36 C(N)=44**						**N_{ij}=10 C(N)=12.3**					

3.6 CALCUL DE LA DERIVEE, $\frac{\partial N}{\partial M}$

Quand on dimensionne ou optimise le nombre de circuit dans une route, il est également nécessaire d'évaluer l'efficience de la route, c-à-d la dérivée partielle du nombre de circuits par rapport à la moyenne du trafic offert, $\frac{\partial N}{\partial M}$. Dans la prochaine itération du programme de planification ces dérivées devaient être utilisées pour plusieurs buts, c.à.d.

- l'optimisation des limites des centraux;
- optimisation des routes de niveau inférieur dans un réseau hiérarchique;
- l'évaluation des changements du coût du réseau de jonction, lorsqu'on introduit des nouveaux centres;
- optimisation des disponibilités des routes individuelles à partir des centraux avec disponibilité restreinte.

Pour le cas général du trafic non poissonnien, caractérisé par la moyenne, *M*, et la variance, *V*, et la disponibilité restreinte, décrite par un fonctions de blocage dépendantes de système, W_i, la congestion de la route en fonction de ces paramètres pourrait être écrit comme

$$B(M, V, N, W)$$

où *N* est le nombre de circuit. Il serait plus convenable, cependant, d'utiliser (*M*, *V/M*) au bien de (*M*, *V*) pour dériver le trafic offert; dans les formules de ce chapitre, ce ration va être dénoté par Θ. . Pour le calcul des dérivées, Θ peut être supposé être approximativement constante. L'utilisation de Θ au lieu de *V* facilite les calculs nécessaires, sans affecter d'une manière significative, l'exactitude des résultats. Ainsi, la congestion de la route devait être dénotée

$$B(M, \Theta, N, W)$$

Deux cas doivent être considérées, les routes avec la possibilité de débordement, et les routes sans débordement.

Pour le cas des *routes directes* sans possibilité de débordement, la congestion de la route a une certaine valeur pré-définie, en d'autre terme,

$$B(M, \Theta, N, W) = \text{constante}$$

La dérivée partielle de *B* par rapport à *M* donnée

$$\frac{\partial B}{\partial M} + \frac{\partial B}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial M} = 0$$

ou

$$\frac{\partial N}{\partial M} = -\frac{\frac{\partial B}{\partial M}}{\frac{\partial B}{\partial N}}$$

Pour le cas des *routes débordant*, c-à-d les routes avec possibilité de débordement, le trafic de débordement de la route devait être considéré constant plutôt que la congestion, alors

$$m = M \cdot B(M, \Theta, N, W) = \text{constante}$$

Dans ce cas la dérivée partielle par rapport à *M* donne

$$B + M \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial M} + \frac{\partial B}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial M} \right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial N}{\partial M} = -\frac{\frac{B}{M} + \frac{\partial B}{\partial M}}{\frac{\partial B}{\partial N}}$$

On aura donc à chercher l'expression appropriée de $\frac{\partial B}{\partial M}$ et $\frac{\partial B}{\partial N}$ pour les cas de

- disponibilité totale ($\Theta = 1$ et $\Theta > 1$)
- disponibilité restreinte, trafic poissonnien ($\Theta = 1$)
- disponibilité restreinte, trafic dégénéré ($\Theta > 1$)

3.6.1 Disponibilité totale

On peut maintenant chercher la dérivée partielle $\frac{\partial B}{\partial M}$ et $\frac{\partial B}{\partial N}$ pour la configuration montrée ci-dessous:

Comme dans le chapitre 2.5.1, **Théorie de congestions, Accessibilité totale, Routes alternatives**, la configuration est remplacée par

Les paramètres *N** et *A** pour ce "groupe équivalent" peuvent être déterminés à partir du système d'équations

$$\left.\begin{aligned} M &= A^* \cdot E_{N^*}(A^*) \\ \Theta &= 1 - M + \frac{A^*}{N^* + 1 - A^* + M} \end{aligned}\right\} \tag{3.6.1}$$

La moyenne du trafic de débordement à partir de la route alternative et donc estimé comme

$$m = A^* \cdot E_{N+N^*}(A^*)$$

La congestion, *B*, peut donc être écrite comme

$$B(M, \Theta, N) = \frac{m}{M} = \frac{E_{N+N^*}(A^*)}{E_{N^*}(A^*)} \tag{3.6.2}$$

et cependant,

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{\partial B}{\partial N^*} \cdot \frac{\partial N^*}{\partial M} + \frac{\partial B}{\partial A^*} \cdot \frac{\partial A^*}{\partial M}$$

La dérivée partielle du (3.6.1) par rapport à M donne

$$\frac{\partial A^*}{\partial M} \cdot \frac{M}{M+\Theta-1} + \frac{\partial N^*}{\partial M} \cdot \frac{\partial E_{N^*}(A^*)}{\partial N^*} \cdot A^* = 1$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial M} \cdot \frac{M+\Theta}{M+\Theta-1} - \frac{\partial N^*}{\partial M} = 1 + \frac{A^*}{\left(M+\Theta-1\right)^2}$$

à partir desquelles $\frac{\partial A^*}{\partial M}$ et $\frac{\partial N^*}{\partial M}$ peuvent être calculées.

A partir de (3.6.2) on obtient

$$\frac{\partial B}{\partial A^*} = B \cdot \left(\frac{N}{A^*} - E_{N^*}(A^*) + E_{N+N^*}(A^*) \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial N^*} = \frac{1}{E_{N^*}(A^*)} \cdot \left(\frac{\partial E_{N+N^*}(A^*)}{\partial (N^*+N)} - B \cdot \frac{\partial E_{N^*}(A^*)}{\partial N^*} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial N} = \frac{1}{E_{N^*}(A^*)} \cdot \frac{\partial E_{N+N^*}(A^*)}{\partial (N^*+N)}$$

Les dérivée qui restent $\frac{\partial E_{N^*}(A^*)}{\partial N^*}$ et $\frac{\partial E_{N+N^*}(A^*)}{\partial (N^*+N)}$ sont traitées dans le chapitre 3.9.2. **Formule d'Erlang pour des nombres de circuits non entiers.**

3.6.2 Disponibilité restreinte, trafic Poissonnien

Comme discuté au chapitre 2.5.2, la congestion $B(N, M)$ peut être écrite comme

$$B(N,M) = \sum_{i=0}^{N} W_i \cdot P(i)$$

où $P(i)$ peut être déterminé à partir relations

$$\left.\begin{aligned} &P(i) \cdot M \cdot (1-W_i) = P(i+1) \cdot (i+1) \\ &\sum_{i=0}^{N} P(i) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(i=0,1,2,...N-1)}$$

Les dérivées donnent

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{N} k \cdot W_k \cdot P(k) - B \cdot (1-B)$$

Pour $\frac{\partial B}{\partial N}$ aucune formule explicite n'est disponible, l'approximation appropriée est

$$\frac{\partial B}{\partial N} \approx -\frac{B(N-1) - B(N+1)}{2}$$

3.6.3 Accessibilité restreinte, trafic non-Poissonnien

Les formules explicites ne sont pas disponibles pour ce cas, une approximation similaire à celle utilisée au chapitre 2.5.2 pour les trafics de débordement et de circuits a été trouvée être adéquate pour nos besoins:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial M}\right) \approx \left(\frac{\partial N}{\partial M}\right)_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial M}\right)_3 - \left(\frac{\partial N}{\partial M}\right)_1$$

où le souscrit indique les cas les plus simples

1 : Accessibilité totale, $\Theta = 1$

2 : Accessibilité totale, $\Theta > 1$

3 : Accessibilité restreinte, $\Theta = 1$

3.7 CALCUL DU GROUPE EQUIVALENT DE WILKINSON

Dans quelques chapitres de dimensionnement est d'optimisation des circuits, les paramètre du groupe équivalent de Wilkinson, N^* et A^* on été utilisés. Ces paramètres peuvent être déterminés en résolvant le système qui suit:

$$\left.\begin{aligned} M &= A^* \cdot E_{N^*}(A^*) \\ V &= M \cdot \left(1 - M + \frac{A^*}{N^* + 1 - A^* + M}\right) \end{aligned}\right\}$$

pour des valeurs données de M et V/M ($M > 0$, $V/M > 1$). Cela peut être fait de la façon suivante :

N^* est exprimée comme une fonction de M, V/M et A^*, c-à-d

$$N^* = \frac{A^*}{V/M + M - 1} + A^* - M - 1$$

ainsi réduire le problème à une variable indépendant, A^*.

On peut utilise le méthode de Newton-Raphson pour résoudre les équation qui reste,

$$M = A^* \cdot E_{N^*}(A^*)$$

ou

$$f(A^*) = M - A^* \cdot E_{N^*}(A^*) = 0$$

dans la méthode usuelle, c'est trouver les valeurs initiales appropriées du A*, A_0, et les améliorer itérativement par l'utilisation de

$$A_{K+1} = A_K - \frac{f(A_K)}{f'(A_K)}$$

jusqu'à ce que la valeur résultante devient plus proche à M et V/M.

La valeur initiale appropriée de A^* a être donnée par Y. Rapp comme

$$A_0 = V + 3 \cdot V/M \cdot (V/M - 1)$$

Le calcule de $f'(A)$ reste, et on aura

$$-f'(A) = E_N(A) + A \cdot \left(\frac{\partial E_N(A)}{\partial A} + \frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial A}\right)$$

ou

$$-f'(A) = E_N(A) \cdot \left(1 + N - A + A \cdot E_N(A)\right) + A \cdot \frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \cdot \frac{V/M + M}{V/M + M - 1}$$

Pour le calcule de $\frac{\partial E_N(A)}{\partial N}$ voir chapitre 3.9.2.**Formule d'Erlang pour des nombres de circuits non entiers**.

<u>Indication Pratique</u>: pour éviter des problèmes numériques qui peuvent se présenter pour quelques combinaison de M et V/M, il est conseillé de s'assurer de la convergence de cette méthode par les limites supérieur et inférieur de A, contrôler A_{k+1} contre ses limites, et si nécessaire, utiliser la moitié de cet intervalle pour corriger A s'il se trouve à l'extérieur de l'intervalle.

3.8 FONCTIONS DE BLOCAGE

Dans les systèmes à accessibilité restreinte, les connexions des chemins sont arrangées de manière à ce que l'appel ne passe pas, même s'il existe des circuits disponibles dans le groupe. Cet arrangement est connu sous le nom de multiplexage gradué ou système de liaisons comme si la combinaison de des deux, sera généralement classée comme les système à accessibilité restreinte.

Les appels peuvent déborder du premier groupe même s'il y a des circuits disponibles. Les débordements sont gouvernés par la *fonction de perte,* W_i , qui est définie comme la probabilité qu'un appel arrivé sera rejeté quand il y a ***i*** circuits occupés dans le premier groupe.

La *fonction de perte* pour un système donné dépend clairement de la façon dans laquelle la connexion des chemins est arrangée, et cependant elle dépend beaucoup de l'équipement de commutation utilisé. Ainsi il est nécessaire de construire ses fonctions de perte pour n'importe quel équipement de commutation rencontré lors de la planification d'un réseau spécifique, et de programmer l'acheminement nécessaire.

Si-dessous est un exemple de telle fonction de perte pour le multiplexage gradué d'Erlang.

Multiplexage gradué idéal d'Erlang

Supposons que les appels sont distribués au hasard parmi les circuit de départ, Erlang est arrivées dans cette formule connue

$$W_i = \frac{\binom{i}{K}}{\binom{N}{K}}$$

où N est le nombre total des circuits de départ, et K est le nombre des circuits disponibles à partir de chaque groupe d'arrivée.

Le calcul des valeurs W devait être fait par rapport aux formules suivantes de récurrence pour éviter les problèmes numériques:

$$W_i = 1$$

$$W_{i-1} = W_i \cdot \frac{i-K}{i} \qquad \text{pour i = N, N-1, N-2, ...,K}$$

Autre arrangements

Pour d'autres arrangements des connexions des chemins, spécialement pour deux ou trois systèmes d'étage de liaisons, les formules de W_i sont plus compliquées. Pour quelques arrangements, le calcul a été développé et programmé. L'étude de Wallström "Congestion Studies in Telephone Systems with Overflow Facilities" décrivent beaucoup de telles fonctions.

3.9 FORMULE D'ERLANG

Dans la description des méthodes d'optimisation et de dimensionnement du réseau inter-centraux il y a plusieurs références de la formule d'Erlang, pour le nombre de circuits entiers et non entier, et des dérivées par rapport au circuits ou au trafic offert. Ce chapitre traite avec problèmes numériques rencontrés dans ce contexte, et décrit les façons des arrivées aux valeurs numériques de ces entités pour des paramètres donnés.

3.9.1 Formule d'Erlang pour les circuits en nombre entier

Pour un nombre entier de circuits, *N*, et le trafic moyen offert, *A*, la formule d'Erlang est écrite comme

$$E_N(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}}$$

Cette notation n'est, cependant, pas appropriée pour l'utilisation dans les programmes des ordinateurs spécialement pour les valeurs supérieurs de *N*. La séparation des calculs de $\frac{A^N}{N!}$ et la somme de tels termes résultat pour de telles grande valeurs que le résultat est numériquement utilisable. Il peut être montré facilement que $E_N(A)$peut être calculée par récurrence à partir de la formule suivante:

$$E_K(A) = \frac{A \cdot E_{K-1}(A)}{K + A \cdot E_{K-1}(A)}$$

avec

$$E_0(A) = 1$$

La dérivée partielle de $E_N(A)$ par rapport à *A* est égale à

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial A} = E_N(A) \cdot \left(\frac{N}{A} - 1 + E_N(A) \right)$$

La dérivée partielle de $E_N(A)$ par rapport à *N* n'a pas de sens mathématique, tant que $E_N(A)$ est défini uniquement pour les valeurs entières de *N*. Dans ce cas on peut faire une approximation de la dérivée avec une différence,

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \approx E_{N+N}(A) - E_N(A)$$

ou

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial N} \approx \frac{E_{N+1}(A) - E_{N-1}(A)}{2}$$

ou autre expression utilisant l'ordre supérieur de différences.

Pour un *N* réel, la définition de $E_N(A)$ est

$$E_N(A) = \frac{A^N \cdot e^{-A}}{\int_A^{\infty} t^N \cdot e^{-t}\, dt}$$

La dérivée de cette expression par rapport à *N* donne

$$\frac{\partial E_N(A)}{\partial N} = -E_N(A) \cdot \Psi_{N+1}(A)$$

où

$$\Psi_1(A) = \int_A^\infty e^{A-t} \cdot t^{-1}\, dt$$

et $\Psi_{N+1}(A)$ peut être déterminée par récurrence à partir de

$$\Psi_{K+1}(A) = \left(1 - E_K(A)\right) \cdot \left(\Psi_K(A) + \frac{1}{K}\right) \qquad \text{(K = 1,2,....,N)}$$

Le calcul numérique de $\Psi_1(A)$ peut être déterminé selon une des deux approximations qui suivent:

<u>*Approximation I :*</u>

Pour des *petites* valeurs de *A* (*0 < A < 5*) :

$$\Psi_1(A) = e^{-A} \cdot \left(C + log(A) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{-A^K}{K \cdot K!} \right)$$

où C = 0.57721566490... est la constante de Euler.

Pour les *grandes* valeurs de *A (15 < A)*:

$$\Psi_1(A) = -\sum_{K=1}^{n} \frac{(-1)^K \cdot (k-1)!}{A^K} + R_n$$

où $R_n < \dfrac{n!}{A^{n+1}}$

<u>*Approximation II*</u>, laissant 8 décimaux correctes:

Pour *A < 1* :

$$\Psi_1(A) = e^{-A} \cdot \left(\left(\left(\left(\left(a_1 \cdot A - a_2 \right) \cdot A + a_3 \right) \cdot A - a_4 \right) \cdot A + a_5 \right) \cdot A - a_6 - log(A) \right)$$

Pour *A > 1* :

$$\Psi_1(A) = \frac{\left(\left(\left(A + b_1 \right) \cdot A + b_2 \right) \cdot A + b_3 \right) \cdot A + b_4}{\left(\left(\left(\left(A + c_1 \right) \cdot A + c_2 \right) \cdot A + c_3 \right) \cdot A + c_4 \right) \cdot A}$$

où

a_1 = 0.00107857	b_1 = 8.5733287401	c_1 = 9.5733223454
a_2 = 0.00976004	b_2 = 18.059016973	c_2 = 25.6329561486
a_3 = 0.05519968	b_3 = 8.6347608925	c_3 = 21.0996530827
a_4 = 0.24991055	b_4 = 0.2677737343	c_4 = 3.9584969228
a_5 = 0.99999193		
a_6 = 0.57721566		

3.9.2 Formule d'Erlang pour les nombres non entiers de circuits

La définition de $E_{N+x}(A)$, où *N* n'est pas un nombre entier négatif et $0 < x < 1$, est donnée par

$$E_{N+x}(A) = \frac{A^{N+x} \cdot e^{-A}}{\int_A^{\infty} t^{N+x} \cdot e^{-t}\, dt}$$

La formule de récurrence est donnée

$$E_{K+x}(A) = \frac{A \cdot E_{K+x-1}(A)}{K + x + A \cdot E_{K+x-1}(A)}$$

avec

$$E_x(A) = \frac{A^x \cdot e^{-A}}{\int_A^{\infty} t^x \cdot e^{-t}\, dt}$$

Pour A < 1 , l'intégrale peut être récrites comme

$$\int_A^{\infty} t^x \cdot e^{-t}\, dt = \Gamma(x+1) - \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K \cdot A^{x+K+1}}{K! \cdot (x+1+K)}$$

où

$$\Gamma(x+1) = \prod_{K=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{K}\right)^x}{1+\frac{x}{K}}$$

Pour $A > 1$, la convergence de la somme peut ne pas être la bonne, et l'algorithme qui suit, *appelé* "*continued fraction expansion*", peut être utilisé pour trouver $E_x(A)$:

Etape 1 : Posons C = 1
Posons D = 1
Posons R = 1
Posons I = 0

Etape 2 : Posons B = I/2 - x pour I paire
= (I+1)/2 pour I impaire

Posons D = A/(A+B*D)

Posons R = R*(D-1)

Posons C = C + R

Etape 3 : Si $C \cdot |R| < \varepsilon$ alors $E_x(A) = \frac{1}{C}$

$C \cdot |R| \geq \varepsilon$ alors posons $I = I+1$, et continuer à partir de l'étape 2

La dérivée partielle de $E_{\ +x}(A)$ par rapport à *A* est, comme avant,

$$\frac{\partial E_{N+x}(A)}{\partial A} = E_{N+x}(A) \cdot \left(\frac{N+x}{A} - 1 + E_{N+x}(A) \right)$$

La dérivée partielle de $E_{\ +x}(A)$ par rapport à (*N*+*x*) est

$$\frac{\partial E_{N+x}(A)}{\partial (N+x)} = -E_{N+x}(A) \cdot \Psi_{N+x+1}(A))$$

où $\Psi_{N+x+1}(A)$ peut être obtenu approximativement à partir de

$$\Psi_{K+x+1}(A) = \left(1 - E_{K+x}(A)\right) \cdot \left(\Psi_{K+x}(A) + \frac{1}{K+x} \right) \qquad \text{K = 1,2,........,N}$$

et, finalement, $\Psi_{x+1}(A)$ peut être obtenu approximativement à partir de

$$\Psi_{x+1}(A) \approx \frac{E_{x-\Delta}(A) - E_{x+\Delta}(A)}{2 \cdot \Delta \cdot E_x(A)}$$

avec Δ une petite valeur (0 < Δ < x).