Ubicaciones y Límites de la Central

Sr. T. Fried, UIT

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

CONTENIDO

1 SUPUESTOS

Como se dijo anteriormente, el problema por resolver es cómo extender una red dada en cierto período de tiempo, para demandas específicas relativas al abonado y al desarrollo del tráfico, usando ciertos tipos de central y equipo de transmisión, de acuerdo a especificaciones sobre calidad de servicio, de la manera más económica.

Las redes de telecomunicaciones reales son más bien complejas y sería muy difícil usar métodos matemáticos para encontrar soluciones exactas a las diferentes tareas de planificación involucradas. También es esencial encontrar métodos para tratar con cualquier clase de red, en vez de una red en particular. Para que esto sea posible, uno tiene que elaborar una *red modelo*, una abstracción de la red real, que exprese las relaciones entre las diferentes entidades en términos matemáticos.

Al diseñar un modelo, la pregunta que surge es qué tan cerca de la realidad debe estar dicho modelo. Los modelos más sencillos usualmente llevan a soluciones más sencillas y por tanto más rápidas, pero también a cierta pérdida de exactitud en los resultados. Por eso, debe llegarse a un compromiso razonable entre la exactitud de los resultados y la velocidad del cálculo. Debe recordarse también, que el impacto de la complejidad del modelo sobre la exactitud de los resultados puede variar considerablemente para los diferentes tipos de redes.

Esta tarea es relativamente simple para toda las clases de *equipo*. La estructura de costo de cualquier parte de una central o sistema de transmisión y las propiedades técnicas de los mismos, se conocen a través de la administración o del fabricante. La estructura y propiedades de los diferentes tipos de equipo son además independientes de la red bajo investigación, aunque los valores actuales para los costos involucrados pueden variar considerablemente de una red a otra.

El mismo criterio se aplica para las diversas consideraciones de calidad de servicio.

Los modelos concernientes a la *distribución del abonado* y los *intereses de tráfico* en la red son más problemáticos.

1.1 RED DE ABONADO

Para redes más grandes, obviamente no es práctico definir la ubicación de cada abonado individualmente. Aunque se conocen las ubicaciones de los abonados existentes, los pronósticos, hechos para la población total de una ciudad o para subgrupos de esa población, no serían significativos para definir la ubicación de los abonados individuales.

La distribución de abonados se define, por tanto, de alguna de las siguientes maneras:

1 Nodos

Aquí la densidad de abonado se define en *puntos discretos*, usualmente correspondientes a DPs o gabinetes. Esta aproximación se usa con frecuencia en áreas de población dispersa, tales como áreas rurales, o en las afueras de las áreas metropolitanas. Cada nodo se define por sus coordenadas y los pronósticos de abonados para los puntos de tiempo a considerarse.

2 Cuadrícula rectangular

Para áreas más densamente pobladas, se coloca una cuadrícula rectangular sobre un mapa del área en consideración y entonces los pronósticos definen el número de abonados en cada elemento de la cuadrícula. Se asume luego que dentro de cada elemento de cuadrícula los abonados se *distribuyen uniformemente*.

El tamaño del elemento de cuadrícula se debe escoger de acuerdo a las condiciones locales, con un rango típico de 100 - 500 metros.

3 Areas arbitrarias

En vez de una cuadrícula, los pronósticos se pueden definir por medio de polígonos arbitrarios, es decir, áreas comprendidas dentro de una secuencia de líneas rectas. Estas áreas corresponden usualmente a bloques de casas, áreas de gabinetes, complejos industriales, etc. De nuevo se asume que los abonados están uniformemente distribuidos dentro de cada área.

El método a escogerse depende del tipo de red y de la información disponible. También es posible usar una *combinación* de éstos para cualquier red dada.

En cuanto a los límites de área de la central, la manera de definir la distribución de abonados tiene los siguientes efectos:

Nodos : cada nodo se asigna a una central;

Cuadrícula : cada elemento de cuadrícula se asigna a una central

Areas : cualquier área es asignada a una central

Para "cuadrículas" y "áreas" también es posible dividir una entidad entre un número de centrales; esto no puede hacerse para "nodos".

1.2 CENTRALES

El modelo concerniente a las centrales tiene tres aspectos principales, estos son:

- *la configuración de la central*, dependiente de los abonados, circuitos y tráficos;
- *los requisitos de espacio* para una configuración dada;
- *el equipo de terminal de línea*, dependiente del medio de transmisión utilizado y del tipo de central en uno u otro final de la línea.

Es posible definir varios tipos de centrales a investigar en el curso de la optimización y/o dimensionamiento de la red. Lo que debe determinarse son las capacidades y los costos del equipo y las posibilidades de interacción con otros equipos, de conmutación o transmisión.

Configuración de la central

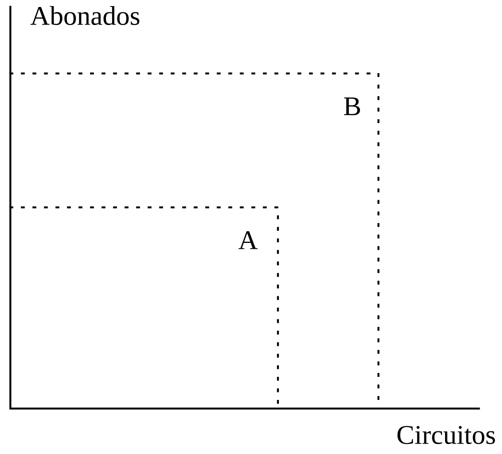
Una central tiene cierta *capacidad máxima*, expresada en

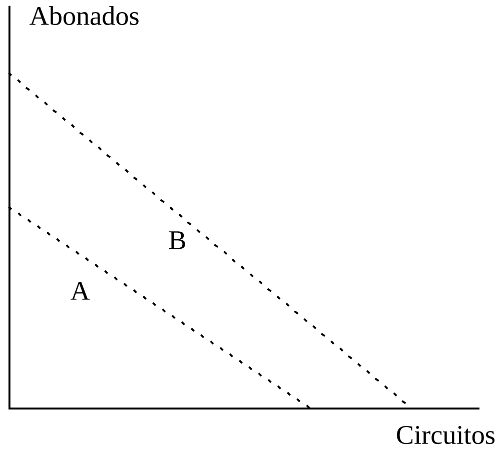
- número de *abonados* que pueden conectarse;
- número de *circuitos* de terminación;
- cantidad de *tráfico* que puede ser manejado;
- número de *intentos de llamadas* por hora;

o una combinación de éstos.

Actualmente el programa considera solamente los dos primeros factores señalados. Debido a que el número de circuitos de terminación está directamente relacionado con el tráfico, el tercer punto se está considerando indirectamente. Los intentos de llamadas plantean un problema más difícil, ya que tienen una fuerte dependencia del actual desempeño de la red, por lo que aquí no son considerados.

Para un tipo de central dada, el programa reconoce dos maneras de definir estas capacidades, es decir, abonado independiente y dependiente y capacidades del circuito:





A y B se refieren a diferentes tamaños de un tipo de central dado.

El costo para una configuración de central dada, se define en los términos siguientes:

- costo del equipo para *un abonado*;
- costos del equipo común para un *grupo de abonados*;
- el tamaño de ese grupo;
- costo del equipo común para una *unidad de central completa*.

Equipo de terminal de línea

Un circuito que conecta dos centrales consiste de la línea misma y de equipo terminal en ambos puntos terminales. El tipo y el costo de este equipo terminal dependen del tipo de central en cualquier terminal y del medio de transmisión usado. Consideramos conveniente describir estos costos en forma de tablas; una tabla para definir los costos de equipo terminal entre todos los tipos de centrales, para un grupo dado de medios de transmisión.

Ejemplo:

Tipos de Central	Grupos de medios de transmisión
S x S	.6 .8 .9 .9L cable
X - barra	MIC (PCM)
Digital	

La especificación del costo del equipo de terminal de línea, consistirá entonces de dos tablas, una para cable y otra para MIC; cada una de ellas con valores de costo 3 x 3.

El equipo terminal a cada lado, comprende usualmente varios ítems. Algunas veces no es fácil trazar una clara línea demarcatoria entre la central y el equipo de transmisión, especialmente para centrales electrónicas. Actualmente ello no constituye diferencia alguna en la tarea de optimizar y dimensionar la red, siempre que todos los rubros de costos involucrados estén incluidos en algún lugar.

1.3 TRAFICO

Como en el caso de la distribución de abonados, desde un punto de vista estadístico no tiene sentido hacer suposiciones en cuanto al volumen de tráfico y la dispersión de abonados *individuales*. Por otra parte, el modelo debe reconocer diferencias en el comportamiento del tráfico para varias categorías, como residencial, de negocios, PBXs, etc. Los pronósticos de tráfico son usualmente más fáciles de hacer para dichas categorías que para toda la población, ya que las categorías reaccionan en forma diferente a los cambios de ambiente, como la provisión de nuevos servicios o alteraciones en la política de tarifas.

Redes locales

Para los casos de áreas rurales, urbanas y metropolitanas, se ha encontrado conveniente subdividir el área total de la red en un número de, así llamadas, *áreas de tráfico*. Se asume que las propiedades de tráfico para todos los abonados en dicha área son uniformes. Al definir dichas áreas se debe prestar atención a la "mezcla" presente y futura de categorías y a las posibilidades de hacer mediciones de tráfico para obtener los "datos brutos" necesarios para el proceso de pronóstico del tráfico.

Los tráficos entre tales áreas de tráfico pueden entonces describirse en forma de matriz. Como los límites de área de la central usualmente no coinciden con los límites del área de tráfico, el tráfico entre centrales se encontrará entonces mediante cálculos simples que involucran abonados por central, por área de tráfico.

Zonas de tráfico y abonados

Para redes locales, los cálculos de tráfico se basan en abonados/ central, categorías de abonado y zonas de tráfico.

Supuestos:

- El área en consideración se ha dividido en zonas de tráfico; los abonados que pertenecen a cada zona se asume que tienen propiedades uniformes, tales como tráfico originado y terminado por abonado y dispersión de tráfico a otras zonas.

- El número de abonados (SUB) de cualquier zona, *T*, es conocido para cualquier central dada, *E*. Este número se ha definido en los datos de entrada o se ha calculado en la optimización de límites previa: *NSUB (E,T).*

- Se conoce el número total de abonados pertenecientes a cualquier zona de tráfico, *T*. Este se ha calculado después de leer los datos de entrada concernientes a la *definición de la zona* y a la *distribución de abonado* : $SUBTZ_T$

- El tráfico total de cualquier zona de tráfico, *T*, a otra zona de tráfico , *U*, se conoce por los datos de entrada: A_{TU}

El interés del trafico específico entre un abonado en la zona de tráfico *T* y un abonado en la zona de tráfico *U*, se pueden expresar así:

$$a(T,U) = \frac{A_{TU}}{SUBTZ_T \cdot SUBTZ_U}$$

Finalmente, el tráfico desde cualquier central, E, a otra central, F, se puede escribir como

$$Traficó(E,F) = \sum_{T,U} NSUB(E,T) \cdot NSUB(F,U) \cdot a(T,U)$$

1.4 Estructura de costo

Costo abonado - central

El costo de conectar un abonado a una central se puede representar por

$$D_E \cdot C_s(D_E) + C_f$$

donde

D_E es la distancia abonado - central,
Cs es la distancia dependiente del costo de los medios de transmisión,
Cf es la distancia independiente del costo de los medios de transmisión.

Costo central - central

El costo de un circuito central - central se puede representar como

$$D_{EF} \cdot C_c(D_E) + C_d$$

donde

D_{EF} es la distancia de la central E a la central F,
Cc es la distancia dependiente del costo de los medios de transmisión,
Cd es la distancia independiente del costo de los medios de transmisión.

Cuando se usan diferentes sistemas de transmisión, se escoge el número de circuitos entre *E* y *F*. En este caso se lleva a cabo una optimización separada.

Un parámetro adicional de un sistema de transmisión es la capacidad, es decir, el número máximo de circuitos que puede llevar.

COSTO DE UNA CENTRAL

El costo de una central consiste de dos componentes:

- costos del equipo de la central;
- costo del edificio.

Se asume que ambos componentes son una función de los abonados, circuitos de entrada y de salida.

Para una central dada, *E*, representamos el costo del equipo de la central con *Ca(E)* y el costo del edificio con *Cb(E)*.

Así, la función del costo total de la red, C, se puede expresar como

$$C = \sum_{E=1}^{NEX} \sum_{(i,j)\in E} sub(i,j) \cdot \left[C_s(D_E) \cdot D_E + C_f \right] + \sum_{E=1}^{NEX} \left[C_a(E) + C_b(E) \right] +$$
$$+ \sum_{E=1}^{NEX} \sum_{F=1}^{NEX} N_{EF} \cdot \left[C_c(D_{EF}) \cdot D_{EF} + C_d \right]$$

donde

NEX es el número de centrales,

N_{EF} es el número de circuitos de la central *E* a la central *F*.

2 OPTIMIZACION DE LIMITES

La optimización de límites, es decir, el encontrar los límites del área de la central de tal manera que el costo total de la red se minimice, se basa en los siguientes supuestos:

- se fijan las ubicaciones de la central (temporalmente) ;

- se conoce el costo de la red de empalme de cualquier abonado, de una zona de tráfico dada, *K*, perteneciente a una central dada *E* (ésta se calculó en la iteración anterior) : $C_j(K,E)$

- se conoce el costo promedio, por abonado, de la central y del edificio para cualquier central dada,*E*: $C_b(E)$

- el costo de conectar un abonado a cualquier central se puede calcular a partir de:
  - la distancia del abonado a la central, D_E
  - el plan de transmisión
  - los costos de los medios de transmisión disponibles,

y se puede escribir como : $D \quad \cdot C \ (D \quad) + C$

El costo de conectar un abonado a la ubicación (*x,y*), perteneciente a la zona de tráfico *K*, a una central *E* en $\left(X_E, Y_E\right)$ puede así expresarse como:

$$C(E) = C_j(K,E) + C_b(E) + D_E \cdot C_s(D_E) + C_f \tag{2.2.1}$$

donde $D_E = D(x, y, X_E, Y_E)$

Ahora tenemos dos posibilidades de encontrar los límites de central óptimos, dependiendo de uno o más supuestos, esto es, si un elemento de cuadrícula puede dividirse o no entre centrales.

- **El elemento de cuadrícula *no se puede* dividir :**

En este caso, el elemento de cuadrícula completo se asigna a una central. La decisión a qué central, *E*, deberá pertenecer un elemento de cuadrícula de abonado dado, se puede hacer simplemente por comparación. *E* debe escogerse de modo que *C(E)* se minimice.

Así, para cada elemento de cuadrícula *(i,j)* el valor *C(E)* se calcula para cada central, *E*, y el más bajo *C(E)* determina *E*. El único problema que queda es encontrar la distancia de una central en $\left(X_E, Y_E\right)$ al elemento de cuadrícula *(i, j)*. Ver capítulo “Cálculo de la Distancia” para mayor detalle.

NOTA : Para este método debe tomarse una decisión cuidadosa respecto al tamaño de los elementos de la cuadrícula. Si fuese muy grande, se afectará la exactitud de los límites; si fuese muy pequeño, puede haber problemas con el espacio de almacenamiento y el tiempo de cálculo.

- **El elemento de cuadrícula *puede* dividirse :**

En este caso, cualquier elemento de cuadrícula puede pertenecer completamente a una central, o éste puede dividirse entre dos o más centrales. Antes de discutir la manera de encontrar los límites óptimos para toda el área de la red bajo consideración, consideremos el límite entre dos centrales, *E* y *F*. Obviamente, el límite se debe trazar de forma tal que los valores de *C(E)* y *C(F)* a lo largo del límite sean iguales.

Usando la fórmula (2.2.1) encontramos que:

$$C_j(K,E)+C_b(E)+D_E\cdot C_s(D_E)+C_f(E)=C_j(K,F)+C_b(F)+D_F\cdot C_s(D_F)+C_f(F) \qquad (2.2.2)$$

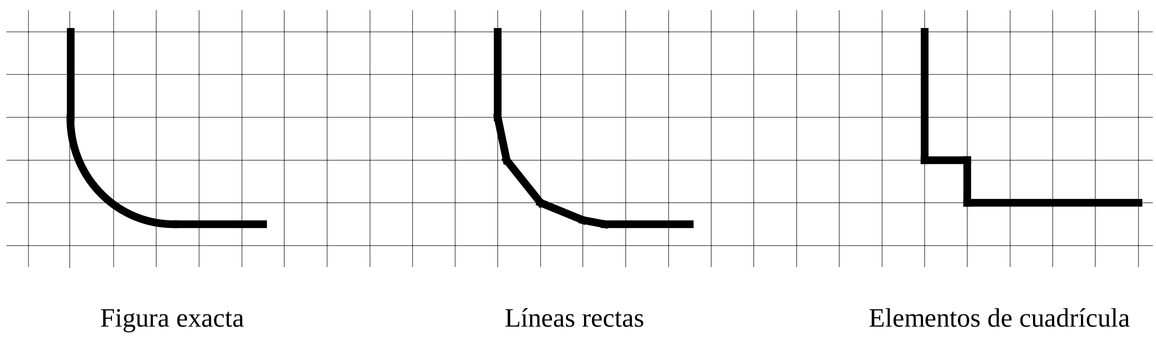
o, simplificada:

$$b(E)+D_E\cdot c(E)=b(F)+D_F\cdot c(F)$$

Ahora, dependiendo de la relación entre los valores *b(E)* y *b(F)*, y *c(E)* y *c(F)*, el límite entre *E* y *F* es una de las siguientes figuras geométricas:

$c(E)=c(F)$	$b(E)=b(F)$	:	línea recta
	$b(E)\neq b(F)$	:	hipérbola
$c(E)\neq c(F)$	$b(E)=b(F)$	:	círculo
	$b(E)\neq b(F)$	:	figura cerrada de cuarto orden.

Excepto por la primera, estas funciones de límites no son muy apropiadas para cálculos subsiguientes, es decir, la optimización de las ubicaciones y los límites de la central. Por tanto, cualquier límite se representará como una secuencia de segmentos de líneas rectas, aproximándose al límite exacto. La figura siguiente muestra una comparación entre el límite exacto y los dos métodos mostrados anteriormente:



Comparación entre las definiciones de límites

Ya que las zonas de tráfico y la distribución de abonados todavía se definen en los elementos de cuadrícula, una aproximación razonable consiste en encontrar los límites para cada fila de la cuadrícula; esto es, encontrar la intersección de las funciones de límites y las líneas superiores e inferiores que separan esta fila de sus vecinos.

Para cualquier par de centrales, *E* y *F*, y una línea dada $y=y_0$, se puede usar la fórmula (2.2.2) para encontrar el punto de límite con la precisión deseada. Entonces, los puntos correspondientes en filas sucesivas se pueden conectar para formar la secuencia de límites.

Métodos simplificados para la optimización de límites

Si no hay información sobre la distribución de abonados por centrales y la red de empalme está disponible (cuando se definen los límites iniciales), o queremos acelerar los cálculos (cuando se investigan centrales tentativas), un método conveniente es desconocer la influencia de los costos de la central, del edificio y de la red de empalme; es decir, desconocer los dos primeros términos en (2,1).

Así obtenemos

$$C(E)=D_E\cdot C_s(D_E)+C_f \qquad (2.3)$$

Además, podemos hacer caso omiso de los diferentes costos de los medios de transmisión en la red de abonado; es decir, hacer una división puramente geográfica en áreas de central. En este caso los límites se ubican equidistantes de las centrales adyacentes.

Entonces, si se usa distribución de abonado en cuadrícula y el elemento de cuadrícula no se divide, las líneas de los límites se redondean al elemento de cuadrícula más cercano.

Además, debemos tratar los límites de central establecidos, es decir, las áreas de centrales predefinidas que no se pueden cambiar y que tienen que excluirse del proceso de optimización.

Limites de centrales de transito

Un caso especial que puede considerarse como optimización del límite de una central, consiste en definir las centrales conectadas a una central de nivel más alto, es decir, definir la central superior de tránsito o tándem para cada central.

El costo $C(E)$ de conectar un circuito de una central en la ubicación (x, y) a una central E en (X_E, Y_E), puede expresarse como en (2.1).

Decidir a qué central, E, debe pertenecer una central dada, puede hacerse por comparación. E se debe escoger de modo que $C(E)$ se minimice. Aquí E es una central de tránsito de un nivel más alto.

Como la influencia del costo de los medios de transmisión es lo más significativo en la expresión de $C(E)$, podemos usar los métodos simplificados para la optimización de límites mencionados anteriormente; es decir, escoger la central superior de modo que el costo del circuito o la distancia sean mínimos.

Una aproximación práctica es dar la posibilidad adicional a centrales superiores predefinidas o a centrales superiores obtenidas de un modo interactivo.

La distancia desde cualquier central a la central superior se calcula como

- la distancia $D(x, y, X_E, Y_E)$ a lo largo de la hipotenusa o del cateto desde la central en (x, y), a la central superior en (X_E, Y_E)
- el trayecto más corto $D(i, j)$ de una central en el nodo i a la central superior en el nodo j, para un modelo de red con nodos y enlaces conectando estos nodos.

2.1 CALCULO DE LA DISTANCIA

Distancia de una central a una central/nodo

Para modelos de red con nodos y enlaces conectando a esos nodos, las longitudes de los enlaces se definen como datos, y la distancia entre dos puntos cualesquiera es entonces la longitud del trayecto más corto entre ellos.

Existen diferentes algoritmos para obtener el trayecto más corto entre dos nodos.

El algoritmo aquí descrito encuentra el trayecto más corto desde cualquier nodo, i, a todos los otros nodos en la red para longitudes de arco dadas. Para hallar los trayectos más económicos, se da el costo por arco.

Dados:	N	=	número de nodos en la red
	L	=	número de enlaces en la red
	d_{ij}	=	longitud/costo del arco entre los nodos i y j, si el enlace existe.

Encontrar: El trayecto más corto desde el nodo, i, hacia todos los demás nodos.

Método :

Paso 1:	Poner D_j	=	infinito	para j =1, 2,...N
	Poner $ULTIMO_j$	=	0	para j =1, 2,...N
Paso 2:	Poner D_i	=	0	
	Poner D_j	=	d_{ij} si el enlace i hacia j existe; en este caso también	
	Poner $ULTIMO_j$	=	i	

Paso 3: Para cualquier nodo, K , donde $ULTIMO_K$ se ha cambiado en la iteración anterior, hacer lo siguiente:

- encontrar todos los enlaces que tienen K como punto extremo.
- para cada enlace investigar el otro punto extremo, M:

  si $D_K + d_{K,M} < D_M$

  entonces el trayecto i hacia M pasa a través del nodo K, y por consiguiente establece : $D_M = D_K + d_{K,M}$

  $ULTIMO_M = K$

- habiendo investigado todos los puntos, K, la iteración está hecha. Si durante esta iteración no ha ocurrido restablecimiento de D ni de $ULTIMO$, proceder con el paso 4; de otra manera, comenzar una nueva iteración de acuerdo con el paso 3.

Paso 4: Ahora se han establecido todos los trayectos más cortos desde el nodo i.

D_j ahora contiene la distancia más corta de i hacia j.

$ULTIMO_j$ contiene el último y único nodo en el trayecto de i hacia j.
El trayecto desde i hacia cualquier nodo se puede entonces reconstruir usando los nodos intermedios almacenados en $ULTIMO$.

El trayecto completo será entonces:

$$i \rightarrow K(n-1) \rightarrow K(n-2) \rightarrow \Lambda \rightarrow K(2) \rightarrow K(1) \rightarrow j$$

donde

$K(1) = ULTIMO_j$

$K(2) = ULTIMO_{K(1)}$

. . .

$K(n-1) = ULTIMO_{K(n-2)}$

$K(n) = ULTIMO_{K(n-1)}$ el cual es igual a i.

Para otros modelos de red se especifican las coordenadas de las centrales/nodos, y la distancia entre una central en (X_E, Y_E) y una central/nodo en (x, y) se define como

$$D(X_E, Y_E, x, y) = \sqrt{(X_E - x)^2 \cdot L_x^2 + (Y_E - y)^2 \cdot L_y^2} \tag{2.4}$$

si se mide a lo largo de la hipotenusa

o

$$D(X_E, Y_E, x, y) = |X_E - x| \cdot L_x + |Y_E - y| \cdot L_y \tag{2.5}$$

si se mide a lo largo del cateto,

donde L_x y L_y son X- e Y- dimensiones del elemento de cuadrícula.

Distancia media de la central al elemento de cuadrícula

Para los abonados definidos en el elemento de cuadrícula, un método adecuado consiste en encontrar la distancia media desde un punto, que representa una central o concentrador, a un abonado en cierto elemento de cuadrícula.

Para elementos de cuadrícula rectangulares, la distancia desde una central en (X_E, Y_E) hasta un punto arbitrario (x, y) se define como

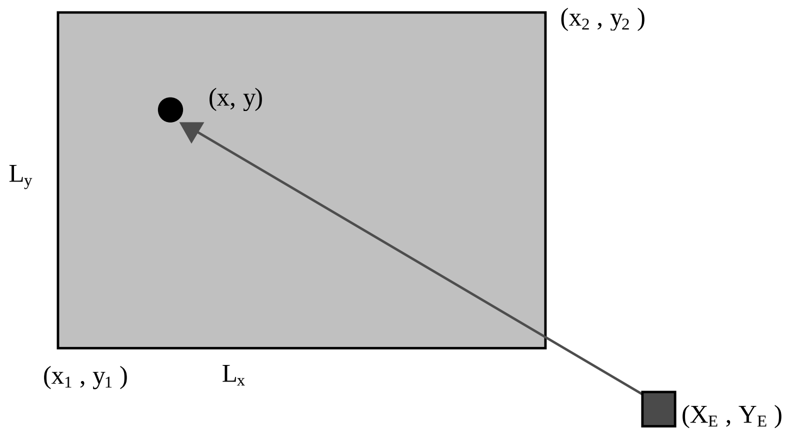
$$D(X_E, Y_E, x, y) = \sqrt{(X_E - x)^2 \cdot L_x^2 + (Y_E - y)^2 \cdot L_y^2}$$

a lo largo de la hipotenusa

$$D(X_E, Y_E, x, y) = |X_E - x| \cdot L_x + |Y_E - y| \cdot L_y$$

a lo largo del cateto

donde L_x y L_y son las longitudes del lado del rectángulo.



La *distancia media* desde (X_E, Y_E) al rectángulo se puede encontrar entonces a partir de la doble integral

$$D = \frac{1}{area} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} d(X_E, Y_E, x, y)\, dx\, dy \tag{2.6}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son esquinas opuestas del rectángulo,

y $\acute{a}rea = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)$ es el área de rectángulo.

METODO DE LA HIPOTENUSA

La función primitiva de D es

$$F(z, u) = 2 \cdot z \cdot u \cdot s + z^3 \cdot \log\left(\frac{u + s}{z}\right) + u^3 \cdot \log\left(\frac{z + s}{u}\right)$$

donde $s = \sqrt{z^2 + u^2}$

Entonces tendremos la distancia, D, insertando los límites de integración para z y u, llegando así a:

$$D(X_E, Y_E, x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{G(x_2, y_2) - G(x_2, y_1) - G(x_1, y_2) + G(x_1, y_1)}{6 \cdot L_x \cdot L_y} \tag{2.7}$$

donde $G(z, u) = 2 \cdot z \cdot u \cdot s + z^3 \cdot \log(u + s) + u^3 \cdot \log(z + s)$

Los términos que contienen u^3 y z^3 se cancelarán cuando se inserten los límites de integración.

METODO DEL CATETO

La fórmula (2.6) nos lleva a

$$D = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left| X_E - x \right| \cdot L_x \; dx + \frac{1}{y_2 - y_1} \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left| Y_E - y \right| \cdot L_y \; dy \tag{2.8}$$

y

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left| X_E - x \right| \cdot L_x \; dx = \begin{cases} D_x \cdot L_x & si \quad D_x \geq 0.5 \\ (D_x^{\;2} + 0.25) \cdot L_x & si \quad D_x < 0.5 \end{cases}$$

donde $D_x = \left| X_E - x_2 + 0.5 \right|$

$$\frac{1}{y_2 - y_1} \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left| Y_E - y \right| \cdot L_y \; dy = \begin{cases} D_y \cdot L_y & si \quad D_y \geq 0.5 \\ (D_y^{\;2} + 0.25) \cdot L_y & si \quad D_y < 0.5 \end{cases}$$

donde $D_y = \left| Y_E - y_2 + 0.5 \right|$

2.2 COSTO DE LA RED DE EMPALME POR ABONADO

El costo de la red de empalme de cualquier abonado de una zona de tráfico dada, *K*, perteneciente a una central dada, *E*, es

$$C_j(K,E) = \sum_F N_{EF} \cdot C_c(E,F) + \sum_F N_{FE} \cdot C_c(F,E)$$

donde

- N es la diferencia en los circuitos, causada por un abonado.
- C_C es el costo de un circuito; depende del costo de los medios de transmisión disponibles y la distancia de una central a otra.

N se puede expresar como

$$N \cong A \cdot \partial N / \partial A$$

$\partial N / \partial A$ es la eficiencia de la ruta; se calcula al dimensionar u optimizar el número de circuitos en una ruta; un valor inicial apropiado es 1.2.

Así se obtiene la siguiente ecuación

$$C_j(K,E) = \sum_F A_{EF} \cdot \partial N / \partial A_{EF} \cdot C_c(E,F) + \sum_F A_{FE} \cdot \partial N / \partial A_{FE} \cdot C_c(F,E)$$

$A_{EF} = NSUB(F,T) \cdot a(K,T)$

$A_{FE} = NSUB(F,T) \cdot a(T,K)$

$NSUB(F,T)$ = número de abonados para la central *F*, o la zona de tráfico *T*

$a(K,T)$ = interés especifico de tráfico entre un abonado en la zona de tráfico *K* y un abonado en la zona de tráfico *T*.

3 UBICACIONES DE LA CENTRAL

Aquí trataremos sobre los métodos para definir las ubicaciones óptimas de las centrales, es decir, encontrar las ubicaciones de central de tal manera que se minimice el costo total de la red.

Los límites del área de la central se consideran *establecidos temporalmente*.

También disponemos de las ubicaciones iniciales de la central (de iteraciones anteriores). Algunos de los métodos aquí descritos mejorarán estas ubicaciones.

Distribución de abonados en la cuadrícula

Para cualquier central dada, *E*, la ubicación teóricamente óptima (X_E, Y_E) tiene la propiedad de que las derivadas parciales de la función de costo de la red total, *C*, con respecto a X_E y Y_E son iguales a cero. Como *C* es dependiente de todas las coordenadas de las centrales y queremos encontrar el mínimo total de *C*, debemos encontrar un grupo de coordenadas de central (X_E, Y_E) para *E* = 1,2...., de modo que

$$\left.\begin{aligned} \partial C/\partial X_E &= 0 \\ \partial C/\partial Y_E &= 0 \end{aligned}\right\} \quad para\ E = 1,2,\ldots\ NEX$$

Así, para X_E obtenemos

$$\begin{aligned} \partial C/\partial X_E = &\sum_{(i,j)\in E} \left[sub(i,j) \cdot C_c(D_E) \cdot \partial D_E / \partial X_E \right] + \\ &+ \sum_{F \neq E} \left[N_{EF} \cdot C_c(E,F) + N_{FE} \cdot C_c(F,E) \right] \cdot \partial D_{EF} / \partial X_E \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde D_E representa la distancia media de la central *E* desde el elemento de cuadrícula (*i,j*), y D_{EF} simboliza la distancia de la central *E* a la central *F*. C_C representa el costo por circuito.

Una expresión similar para Y_E da $\partial C/\partial Y_E$.

Se emplearán diferentes métodos para resolver este sistema de ecuación *2*E*, para competir con los dos métodos de medición de las distancias descritos en el capítulo 2: Límites de Central.

METODO DE LA HIPOTENUSA

El método de cálculo de las derivadas parciales $\partial D_E/\partial X_E$, $\partial D_E/\partial Y_E$, $\partial D_{EF}/\partial X_E$ y $\partial D_{EF}/\partial Y_E$ se describe en el anexo 3.1.

Insertando las derivadas en (3.1) obtenemos un sistema de ecuaciones no-lineales *2*NEX*, el cual no es agradable de resolver. Podemos, sin embargo, expandir $\partial C/\partial X_E$ y $\partial C/\partial Y_E$ en una serie Taylor y truncar después las derivadas de primer orden. Entonces obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \partial C/\partial X_E + \sum_{F=1}^{NEX} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial X_E\, \partial X_F} \cdot \Delta X_F + \frac{\partial^2 C}{\partial X_E\, \partial Y_F} \cdot \Delta Y_F \right] = 0 \\ \partial C/\partial Y_E + \sum_{F=1}^{NEX} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial Y_E\, \partial X_F} \cdot \Delta X_F + \frac{\partial^2 C}{\partial Y_E\, \partial Y_F} \cdot \Delta Y_F \right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad E = 1,2,\ldots, NEX$$

Este es ahora un sistema de ecuaciones lineales *2*NEX* en ΔX_F y ΔY_F , Δ representando mejora, que puede fácilmente resolverse por métodos estándares.

El hecho de que los coeficientes en la diagonal de la matriz sean grandes comparados con los otros coeficientes, facilita este proceso.

El *método iterativo* siguiente se puede usar para mejorar simultáneamente todas las ubicaciones de central:

Paso 1 : Empezar con el presente grupo de (X_E, Y_E).

Paso 2 : Calcular derivadas y coeficientes (ver anexo 3.1).

Paso 3: : Resolver el sistema de ecuaciones lineales, es decir, encontrar todo (ΔX_E , ΔY_E)(ver anexo 3.2).

Paso 4 : Volver a establecer la ubicación de cualquier central, *E*, a ($X_E + \Delta X_E$, $Y_E + \Delta Y_E$).

Paso 5 : Repetir desde el paso 2 hasta que el *máximo* (ΔX_E , ΔY_E) sea más pequeño que el valor predefinido.

Observe que el método arriba mencionado puede:

- llevar al óptimo *local* y no al óptimo *global*, cuando las ubicaciones iniciales no son suficientemente buenas.

- oscilar, dependiendo de los cambios en los costos de los medios de transmisión. Sin embargo, esto puede ser detectado y corregirse fácilmente.

METODO DEL CATETO

El método de cálculo de las derivadas parciales de la distancia, se describe en el anexo 3.1

Insertando las derivadas en (3.1) obtenemos:

$$\partial C / \partial X_E = \sum_{(i,j)\in E} sub(i,j)\cdot C_c(D_E)\cdot \begin{cases} -L_x & si\ j-1 \geq X_E \\ 2\cdot(X_E - j + 0.5)\cdot L_x & si\ j-1 < X_E < j \\ L_x & si\ \quad X_E \geq j \end{cases} + \qquad (3.2)$$

$$+ \sum_{F\neq E} \left[N_{EF}\cdot C_c(E,F) + N_{FE}\cdot C_c(F,E)\right]\cdot \begin{cases} -L_x & si\ X_E < X_F \\ L_x & si\ X_E > X_F \end{cases}$$

y expresión similar para $\partial C / \partial Y_E$.

El siguiente método puede usarse entonces para encontrar la ubicación óptima de cada central, *E*:

Paso 1 : Encontrar la columna (fila) *K* para la central.

Definir

$$S_j = \sum_i sub(i,j)\cdot C_s(D_E) \quad para\ (i,j)\in E \quad + \qquad (3.3)$$

$$\sum_F \left[N_{EF}\cdot C_c(E,F) + N_{FE}\cdot C_c(F,E)\right] \quad para\ j-1 \leq X_F < j$$

y $S = \sum_j S_j$

Entonces la columna (fila) *K* se encuentra donde

$$\sum_{j=1}^{K-1} S_j < S/2 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{K} S_j \geq S/2 .$$

Paso 2 : Encontrar la ubicación exacta X_E (Y_E) en la columna (fila) *K*.

Definir

$$A = \sum_{j<K} S_j \qquad\qquad B = \sum_{j>K} S_j$$

$$G = \sum P \qquad para\ K - 1 \le X \quad < X \quad , X \quad < K$$

$$H = \sum P \qquad para \quad X \quad \le X \quad < K \quad , X \quad > K - 1$$

donde $P_F = N_{EF} \cdot C_c(E,F) + N_{FE} \cdot C_c(F,E)$

$$T_K = \sum_i sub(i,K) \cdot C_s(D_E) \qquad para\ (i,K) \in E$$

Entonces, la ubicación exacta X_E es

$$X_E = \left[K - 0.5 + \frac{B - A + H - G}{2 \cdot T_K} \right] \cdot L_x \tag{3.4}$$

Así, las derivadas parciales $\partial C/\partial X_E$ y $\partial C/\partial Y_E$ se convierten en cero, si la central está ubicada en la intersección de las medianas X- y Y-, con respecto al número de abonados y circuitos de empalme ponderados por los costos de los medios de transmisión dependientes de la distancia.

Así como el método de la hipotenusa, los métodos arriba mencionados pueden:

- conducir al óptimo parcial y no al óptimo global, si las ubicaciones iniciales no son suficientemente buenas;
- oscilar, dependiendo de los cambios en los costos de los medios de transmisión.

Métodos simplificados para la optimización de la ubicación de centrales

Para acelerar los cálculos (cuando se investiga centrales tentativas), una decisión apropiada consiste en usar el método de catetos para la optimización de la ubicación de centrales, descrito anteriormente, pero desconociendo la influencia de la red de empalme.

Así, para S_j en (3.3) obtenemos

$$S_j = \sum_i sub(i,j) \cdot C_s(D_E) \qquad para\ (i,j) \in E$$

y para X_E en (3.4) tenemos

$$X_E = \left[K - 0.5 + \frac{B - A}{2 \cdot T_K} \right] \cdot L_x$$

o

$$X_E = \left[K + \left(\frac{S}{2} - \sum_{j=1}^{K} S_j \right) \Big/ T_K \right] \cdot L_x \tag{3.5}$$

Entonces, debemos seguir los mismos pasos: Paso 1 para encontrar la columna (fila) K para la central, y Paso 2 para encontrar la ubicación exacta X (Y).

Además, podemos desconocer los diferentes costos de los medios de transmisión en la red de abonado y encontrar el centro de gravedad, es decir, el punto donde hay un balance de abonados a la izquierda y a la derecha, así como arriba y abajo.

Usaremos el mismo método para encontrar la primera columna (fila) y luego la ubicación exacta; pero S_j desde (3.3) es ahora:

$$S_j = \sum_i sub(i,j) \qquad para\ (i,j) \in E$$

y X_E desde (3.5) es:

$$X_E = \left[K + \left(\frac{S}{2} - \sum_{j=1}^{K} S_j \right) \Big/ S_K \right] \cdot L_x$$

Como siguiente simplificación, podemos aproximarnos a la ubicación de un elemento de cuadrícula, esto es, encontrar la columna y la fila de la ubicación de la central usando sólo el paso 1 del método anterior.

Además, debemos tratar ubicaciones de central establecidas, es decir, ubicaciones de central predefinidas que no pueden cambiarse y que tienen que excluirse del proceso de optimización.

Abonados y centrales en nodos

Si el modelo de red se presenta con nodos y enlaces conectando estos nodos, la función de costo de la red total, *C*, es una función discreta sobre todas las ubicaciones de nodos, es decir, no es posible usar derivadas parciales de *C*.

Una posibilidad consiste en calcular el costo de la red total, *C*, para todas las combinaciones de las ubicaciones de central y encontrar la *C más pequeña = Cmin*. Las ubicaciones de central para *Cmin* son las óptimas.

Es evidente que en la práctica no es posible usar dicho método, excepto para redes muy pequeñas.

Por otra parte, es inútil investigar muchas de las combinaciones de ubicación de las centrales.

Hay dos maneras posibles de resolver este problema:

- Eliminar las combinaciones evidentemente sin sentido e investigar el resto; todavía quedarán muchas.

- Investigar algunas de las combinaciones que podrían dar las ubicaciones óptimas de la central. Para cada combinación se recomienda tomar una decisión experta. Usando una computadora, el modo de operación interactivo es el más conveniente; es decir, el experto decidirá sobre las ubicaciones de central para cada combinación y el programa de computadora dimensionará la red y calculará el costo total, *C*, de la misma.

ANEXO 3.1

CÁLCULO DE DERIVADAS

Cuando se usa la distribución de abonado en la cuadrícula, las derivadas parciales de la distancia tienen que calcularse para la optimización de las ubicaciones de la central.

Distancia desde la central a la central/nodo

METODO DE LA HIPOTENUSA

Las derivadas parciales para la expresión de la distancia medida a lo largo de la hipotenusa (ver (2.4)), son:

$$\partial D / \partial X_E = L_x^2 \cdot (X_E - x) / D$$

$$\partial D / \partial Y_E = L_y^2 \cdot (Y_E - y) / D$$

$$\partial^2 D / \partial X_E \; \partial x = -L_x^2 \cdot L_y^2 \cdot (Y_E - y)^2 / D^3$$

$$\partial^2 D / \partial Y_E \; \partial y = -L_x^2 \cdot L_y^2 \cdot (X_E - x)^2 / D^3$$

$$\partial^2 D / \partial X_E \; \partial y = L_x^2 \cdot L_y^2 \cdot (X_E - x) \cdot (Y_E - y) / D^3$$

$$\partial^2 D / \partial Y_E \; \partial x = L_x^2 \cdot L_y^2 \cdot (X_E - x) \cdot (Y_E - y) / D^3$$

METODO DE LOS CATETOS

Las derivadas parciales para la expresión de la distancia medida a lo largo del cateto (ver (2.5)), son:

$$\partial D / \partial X_E = \begin{cases} L_x & si \; X_E > x \\ indefinido & si \; X_E = x \\ -L_x & si \; X_E < x \end{cases}$$

$$\partial D / \partial Y_E = \begin{cases} L_y & si \; Y_E > y \\ indefinido & si \; Y_E = y \\ -L_y & si \; Y_E < y \end{cases}$$

Distancia media de la central al elemento de cuadrícula

METODO DE LA HIPOTENUSA

Para encontrar las derivadas parciales de primer y segundo orden de la distancia con respecto a X_E y Y_E , necesitamos las derivadas correspondientes de la función primitiva *G* (ver (2.7)).

La derivación de *G* produce:

$$\partial G / \partial X_E = L_x \cdot \left[z^2 + 3 \cdot u \cdot s + 3 \cdot z^2 \cdot log(u + s) \right]$$

$$\partial G / \partial Y_E = L_y \cdot \left[u^2 + 3 \cdot z \cdot s + 3 \cdot u^2 \cdot log(z + s) \right]$$

$$\partial^2 G \big/ \partial X_E\ \partial X_E = L_x^2 \cdot \left[5 \cdot z + 6 \cdot z \cdot log(u+s) \right]$$

$$\partial^2 G \big/ \partial Y_E\ \partial Y_E = L_y^2 \cdot \left[5 \cdot u + 6 \cdot u \cdot log(z+s) \right]$$

$$\partial^2 G \big/ \partial X_E\ \partial Y_E = L_x \cdot L_y \cdot 6 \cdot s$$

Las derivadas de la distancia de primer y segundo orden, *D*, se encuentran entonces insertando los límites de integración para *z* y *u*, es decir,

$$\partial = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

donde ∂ representa el valor de cualquier derivada parcial, y las expresiones para *H(z,u)* se enuncian a continuación:

$$\partial D \big/ \partial X_E \quad : \quad H(z,u) = \frac{u \cdot s + z^2 \cdot log(u+s)}{2 \cdot L_y}$$

$$\partial D \big/ \partial Y_E \quad : \quad H(z,u) = \frac{z \cdot s + u^2 \cdot log(z+s)}{2 \cdot L_x}$$

$$\partial^2 D \big/ \partial X_E\ \partial X_E \quad : \quad H(z,u) = z \cdot log(u+s) \cdot \frac{L_x}{L_y}$$

$$\partial^2 D \big/ \partial Y_E\ \partial Y_E \quad : \quad H(z,u) = u \cdot log(z+s) \cdot \frac{L_y}{L_x}$$

$$\partial^2 D \big/ \partial X_E\ \partial Y_E \quad : \quad H(z,u) = s$$

con $s = \sqrt{z^2 + u^2}$

Los términos 5*z y 5*u se eliminarán al insertar los límites de integración.

METODO DE LOS CATETOS

Las derivadas parciales de la distancia (ver (2.8)), son:

$$\partial D \big/ \partial X_E = \begin{cases} L_x & si\ X_E \geq x_2 \\ -L_x & si\ X_E \leq x_1 \\ 2 \cdot D_x \cdot L_x & si\ D_x < 0.5 \quad (x_1 < X_E < x_2) \end{cases}$$

donde $D_x = X_E - x_2 + 0.5$

$$\partial D \big/ \partial Y_E = \begin{cases} L_y & si\ Y_E \geq y_2 \\ -L_y & si\ Y_E \leq y_1 \\ 2 \cdot D_y \cdot L_y & si\ D_y < 0.5 \quad (y_1 < Y_E < y_2) \end{cases}$$

donde $D_y = Y_E - y_2 + 0.5$

ANEXO 3.2

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACION LINEAL

La optimización de las ubicaciones de centrales, ver capítulo 2.3, conduce a un sistema de ecuación lineal por resolver. Este sistema tiene la forma

$$
\begin{array}{l}
a_{11} \cdot z_1 + a_{12} \cdot z_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n} \cdot z_n = b_1 \\
a_{21} \cdot z_1 + a_{22} \cdot z_2 + \quad \cdots \quad + a_{2n} \cdot z_n = b_2 \\
a_{31} \cdot z_1 + a_{32} \cdot z_2 + \quad \cdots \quad + a_{3n} \cdot z_n = b_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1} \cdot z_1 + a_{n2} \cdot z_2 + \quad \cdots \quad + a_{nn} \cdot z_n = b_n
\end{array}
$$

donde los coeficientes $a_{..}$ corresponden al $\partial^2 C / \partial X_E \, \partial X_F$,descrito en el capítulo 2.3; los $b_.$ corresponden a $\partial C / \partial X_E$;y los $z_.$ corresponden a ΔX_E ó ΔY_E .

Los coeficientes $a_{..}$ tienen una peculiar y, para nuestro propósito, agradable propiedad, la cual consiste en que los elementos en la diagonal y subdiagonales son considerablemente más grandes que otros elementos en la misma fila o columna. Esto naturalmente radica en el hecho de que otros elementos contienen derivadas multiplicadas por los costos para las rutas entre centrales, mientras que los elementos alrededor de la diagonal contienen los términos correspondientes para la conexión de la central con los abonados.

Como la relación entre estos términos es usualmente de la magnitud 2 ó 3, el método de *Gauss-Seidel* con *sobre-relajación* surge inmediatamente..

Este método iterativo va de la siguiente manera:

Paso 1: Poner todo $z_i = 0$

Paso 2: Para cada ecuación, *i*, encontrar un valor mejorado de z_i desde

$$z_i(nuevo) = z_i(viejo) + D_i \cdot w$$

donde

$$D_i = (\, b_i - S_i \,) / a_{ii}$$

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot z_j$$

y ω es el factor de relajación, un valor apropiado siendo $\omega = 1.2$

Los valores z contenidos en S_i deben tomarse como

$z_j(nuevo)$ para $j = 1, 2, \ldots i\text{-}1$

y

$z_j(viejo)$ para $j = i, i+1, \ldots n$

Paso 3: Luego de calcular de esta manera todo $z_j(nuevo)$, se investigan los valores para D_i . Si todos esos valores son menos que los valores predefinidos, terminan las iteraciones. De otra manera, el procedimiento se repite desde el paso 2. Se obtendrán resultados después de 4-5 de dichas iteraciones; si no es así, hay algo errado en el cálculo de los coeficientes.

REFERENCIAS

1. PLANITU, UIT PROGRAMAS DE PLANIFICACION DE REDES, VOL 1, Documentación Básica, Edición Preliminar, Junio/1984.

2. ANDERBERG, FRIED, RUDBERG, Optimización de ubicaciones y límites de centrales en las redes telefónicas locales, 5to Congreso Internacional de Teletráfico, Estocolmo, 1973.

3. CCITT Planificación General de Redes, UIT, Ginebra, 1983.