Problème du chemin le plus court

par G. Moumoulidis

UNION INTERNATIONALE DES TELECOMMUNICATIONS
INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION
UNION INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES

SOMMAIRE

1. Problème du plus court chemin

1.1 *Généralités*

Une méthode qui est très effective pour examiner la valeur optimale de la fonction a été présentée par R. Bellman. Cette méthode a été initialement consacrée aux problèmes économiques, mais son utilisation est générale est peut être appliquée aux problèmes de physique et de mathématique. La base de la méthode est alors appelée "principe de l'optimalité". Ce principe est très simple. Il est employé aux problèmes à caractère séquentiel.

Un traitement mathématique complet de la méthode appelle à une connaissance importante de "la théorie des graphes" qui, on croit, au delà de l'étendu de ce cours. La méthode entière devrait être développée par l'utilisation de plusieurs exemples des télécommunications où ce problème est souvent rencontré.

1.2 *Description de l'algorithme*

Le plan du réseau des télécommunications est montré dans la Figure 1. Les noeuds dénotent soient les bâtiments des centraux ou les points de dérivation du réseau. Itinéraire des câbles (dérivés) sont des liaisons entre les noeuds.

Donnant les longueurs des itinéraires des câbles, le problème est de déterminer le "plus court chemin" entre chaque deux noeuds. Ce problème est souvent rencontré dans d'autres différents problèmes. Au lieu de traiter avec les longueurs des câbles, on peut assigner le coût de la liaison à chaque itinéraire de câble; alors le problème est de déterminer le coût minimum d'un circuit de jonction entre deux noeuds.

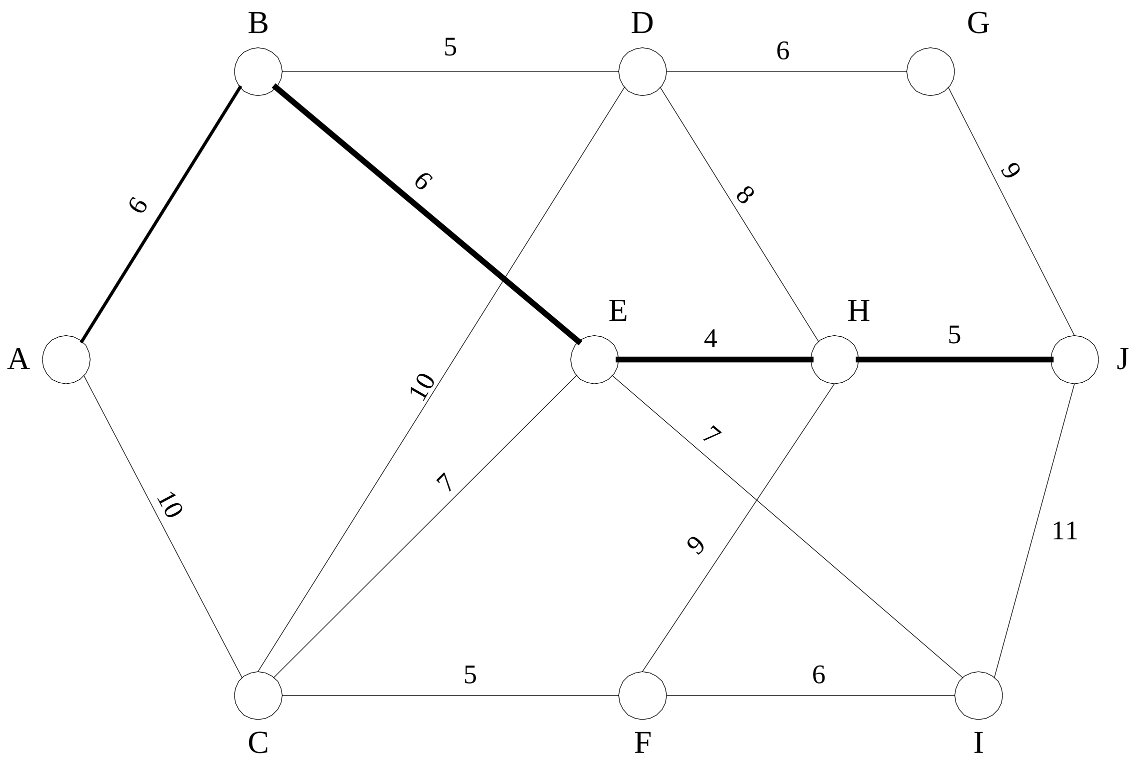


Figure 1

Ce problème peut être pris comme un programme mathématique linéaire, mais il est plus efficient d'utiliser autres algorithmes. La méthode la plus simple est celle de Dantzig, la procédure est comme suit:

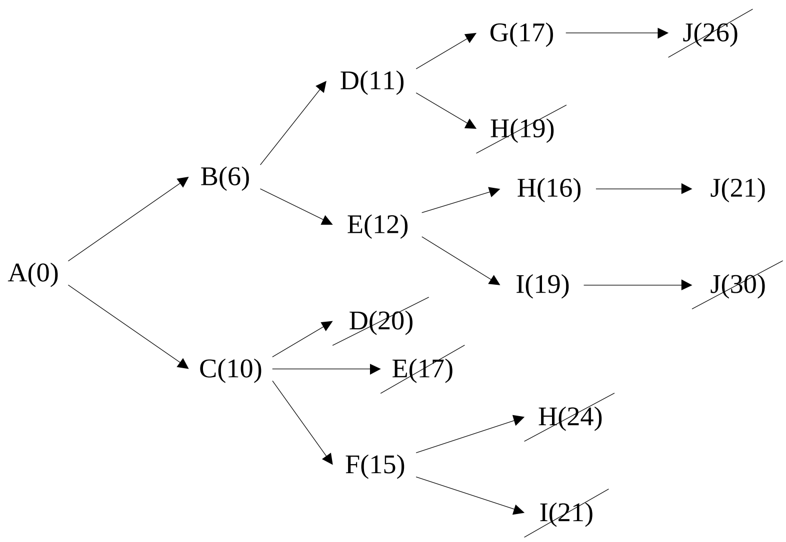
a) Etiqueter les noeuds sources comme "o".

b) Examiner les noeuds adjacents and étiquette, chacun avec sa distance à partir du noeud source.

c) Examiner les noeuds adjacents à ceux déjà étiquetés. Quand un noeud a des liaisons à deux noeuds étiquetés ou plus, sa distance à partir de chaque noeud est ajoutée à l'étiquette de ce noeud. La plus petite somme est choisie et utilisée comme étiquette pour le nouveau noeud.

d) Répéter *(C)* jusqu'à ce que soit le noeud de destination est atteint (si la plus courte route vers seulement un noeud est nécessaire) ou jusqu'à ce que tous les noeuds ont été étiquetés (si les plus courts chemins vers tous les noeuds sont demandés).

Essayons de trouver le plus court chemin du noeud *"A"* vers le noeud *"J"* pour le réseau de la Figure 1. Dans la Figure 2, toutes les étapes pour déterminer le plus court chemin sont illustrées. On met l'étiquette au noeud source *"A"* par 0.



Procédure du plus court chemin
Figure 2

Les noeuds adjacents à *A* sont *B* et *C*. Pour ces noeuds on trouve la distance par l'ajout de l'étiquette de *A* avec la distance des noeuds à partir de *A*. Ainsi, on a pour *B* *0+ 6 = 6*, et pour *C* *0+10 = 10.*

Ces chiffres sont utilisés comme étiquettes pour *B* et *C* respectivement. L'étape suivante est de trouver les noeuds adjacents à *B* et *C* et alors les étiquettes à ces noeuds. Pour *B*, on a le noeud *D* avec l'étiquette *11 = (6+5)* et le noeud *E* avec l'étiquette *12 = (6+6)*. Pour *C*, on a le noeud *D* avec l'étiquette *20 = (10+10)*. Mais le noeud *D* est aussi atteint à travers *B*. Maintenant on garde la plus petite distance, qui est *11*, via *B* et éliminer *D(20).* On continu cette procédure jusqu'à ce que les noeuds restants *(E, F)*, adjacents à *C*, sont examinés. On garde *F(15)* et éliminer *E(17)*. Continuant cette méthode, on stoppe la procédure quand l'examen des noeud(s) nous sommes concernés par son atteinte. Dans la Figure 2, le plus court chemin à partir de *A* vers *J* est tracé avec ligne en gras.

Considérant maintenant tous les chemins partiels contenus dans la chemin de *A* vers *J-(ABEHJ)*. Ils sont: *(AB), (ABE), (ABEH), (BE), (BEH), (BEHJ), (EH), (EHJ), (HJ)*. Si on examine ces chemins partiels, on peut vérifier qu'ils sont des chemins optimaux. Par exemple, à partir de *B* vers *J*, le chemin optimal est *(BEHJ)*. On peut s'assurer du fait que chaque chemin optimal consiste en chemin partiels optimaux.

2. <u>Références</u>

1. A. Kaufmann: "Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle", Tomes 1 & 2, Dunod 1968.